lineaire programmering als hulpmiddel bij de besluitvorming

prof. dr. S.W. DOUMA

ACADEMIC SERVICE

lineaire programmering als hulpmiddel bij de besluitvorming

prof. dr. S.W. DOUMA

ACADEMIC SERVICE

CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Douma, S.W.

Lineaire programmering als hulpmiddel bij de besluitvorming /
S.W. Douma. - 's-Gravenhage : Academic Service
Met index, lit. opg.
ISBN 90-6233-142-4
SISO 365.3 SVS 8.12.3 UDC 519.85
Trefw.: programmeren.

eerste druk 1979
tweede gewijzigde druk 1982
derde herziene druk 1984

Uitgegeven door: Academic Service
Postbus 96996
2509 JJ Den Haag
Druk: Krips Repro Meppel
Bindwerk: Meeuwis, Amsterdam
Omslagontwerp: JAM Gauw
ISBN 90 6233 142 4

INHOUD

VOORWOORD

Dit boek is bedoeld voor studenten in de studierichtingen economie, bedrijfskunde en bestuurskunde. Behalve voor studenten aan universitaire opleidingen is het boek ook zeer geschikt voor studenten aan een H.E.A.O. of H.T.S.

Bij de behandeling van de stof is gekozen voor een intuïtieve, niet-wiskundige benadering. Aan de economische betekenis van de bij lineaire programmering gebruikte begrippen en aan de betekenis van deze begrippen voor de besluitvorming wordt ruime aandacht gegeven. In de praktijk is gebleken, dat deze benadering ook bij het onderwijs aan studenten, die in hun eindexamenpakket van de middelbare school geen wiskunde kozen, goede resultaten oplevert.
Voorkennis op het gebied van de lineaire algebra is bij deze benadering niet vereist.

In hoofdstuk 1 wordt de modelcyclus behandeld. De modelcyclus wordt geïllustreerd met een voorbeeld op het gebied van de voorraadbeheersing. Eventueel kan men hoofdstuk 1 zonder verlies van continuïteit overslaan.

In de hoofdstukken 2, 3, 4 en 5 wordt de methodiek van de lineaire programmering aan de hand van voorbeelden uiteengezet. Deze hoofdstukken vormen de kern van het boek en zouden in iedere cursus, waarin dit boek wordt gebruikt, grondig moeten worden behandeld.

In de hoofdstukken 6, 7 en 8 komen onderwerpen als het duale probleem, de gevoeligheidsanalyse (in hoofdstuk 3 al op elementaire wijze behandeld) en het probleem van het hanteren van meervoudige doelstellingen aan de orde.

In hoofdstuk 9 en 10 worden twee toepassingen van lineaire programmering behandeld. Daarbij wordt gebruik gemaakt van IMOPTI.

LINEAIRE PROGRAMMERING
ALS HULPMIDDEL BIJ
DE BESLUITVORMING

IMOPTI is een interactief programma voor LP-problemen van beperkte omvang, dat door het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (I.O.W.O.) te Utrecht speciaal voor onderwijsdoeleinden is vervaardigd. De benodigde programmatuur wordt door het I.O.W.O. gratis ter beschikking gesteld aan universiteiten, H.E.A.O.'s en H.T.S.'en.

Het verwerven van vaardigheid in het formuleren van LP-modellen, in het oplossen van het model met behulp van een programma als IMOPTI en in het interpreteren van de output, beschouwt de schrijver als de belangrijkste leerdoelstelling bij een cursus waarbij dit boek zou kunnen worden gebruikt.

Gaarne spreek ik mijn dank uit aan mijn collega Drs. S.K.Th. Boersma, die mij bij het schrijven van dit boek enkele waardevolle adviezen heeft gegeven en aan de studenten van de Interfaculteit Bedrijfskunde van de Rijksuniversiteit te Groningen, die door het stellen van vragen tijdens de colleges indirect aan de vormgeving van dit boek hebben bijgedragen.

Roden, april 1979 S.W. Douma

VOORWOORD BIJ DE TWEEDE DRUK

Het is verheugend te kunnen constateren, dat dit boek zijn weg heeft gevonden naar verschillende opleidingen, zodat binnen korte tijd een tweede druk noodzakelijk werd. Deze tweede druk is nagenoeg gelijk aan de eerste druk; twee vraagstukken (4-5 en 5-2) zijn gewijzigd en enkele nieuwe vraagstukken zijn toegevoegd (2-7, 5-3 en 8-1). Tenslotte zijn de drukfouten, die de eerste druk nog ontsierden, hersteld.

Roden, januari 1982 S.W. Douma

VOORWOORD BIJ DE DERDE DRUK

Omdat zowel docenten als studenten gunstig hebben gereageerd op de eerste en tweede druk van dit boek, is de tekst van de derde druk bijna geheel gelijk aan die van de tweede druk. Wel deden verschillende gebruikers het verzoek een groter aantal vraagstukken en uitwerkingen van vraagstukken in het boek op te nemen. Van alle vraagstukken, die in de tweede druk voorkwamen (27 stuks) zijn daarom nu ook de uitwerkingen opgenomen. Daarnaast zijn 15 nieuwe vraagstukken toegevoegd.

Sedert het verschijnen van de eerste druk in 1979 heeft de computertechnologie een enorme ontwikkeling doorgemaakt. Veel onderwijsinstellingen beschikken thans over eigen microcomputers. Voorts is thans een LP-pakket (OPTIMIZER) in Nederland verkrijgbaar, dat zeer geschikt is voor onderwijsdoeleinden en dat gebruikersvriendelijk is. Dit pakket is verkrijgbaar bij SOFTKEY B.V. te Deventer. Met behulp van OPTIMIZER kunnen studenten ervaring opdoen in het formuleren van LP-modellen en in het oplossen daarvan op een microcomputer. In hoofdstuk 9 is naast de output van IMOPTI nu ook de output van OPTIMIZER opgenomen.

De schrijver spreekt de hoop uit, dat door bovengenoemde aanvullingen de gebruikswaarde van het boek nog is toegenomen.

Roden, april 1984 S.W. Douma

1. DE AARD VAN DE KWANTITATIEVE BESLUITVORMINGSTECHNIEKEN

1.1. GESCHIEDENIS

De geschiedenis van de kwantitatieve besluitvormingstechnieken (Operations Research (Am.), Operational Research (Eng.), Operationele Research (Ned.), Management Science) gaat terug tot het begin van de Tweede Wereldoorlog [1]. Gedurende de tweede wereldoorlog werden voor het eerst kwantitatieve besluitvormingstechnieken op grote schaal en met succes toegepast op militaire problemen van operationele aard. Na de oorlog begonnen de grotere organisaties eveneens de nieuwe kwantitatieve technieken toe te passen.

1.2. TOEPASBAARHEID

Men kan onderscheid maken tussen operationele en strategische beslissingen. Operationele en strategische beslissingen verschillen op meerdere punten van elkaar zoals is te zien in onderstaande tabel:

	Operationele beslissingen	Strategische beslissingen
Tijdsduur die bij probleemstelling in beschouwing wordt genomen	kort	lang
Is een eenmaal genomen beslissing gemakkelijk reversibel?	ja	nee
Draagt de beslissing een repeterend karakter	ja	nee
Deel van de organisatie waarop de beslissing betrekking heeft	klein	groot
Doelstellingen gegeven	ja	nee

Voorbeelden van beslissingen van operationele aard worden bijv. gevonden in de korte-termijn planning in de fysieke distributie. Voorbeelden van beslissingen van strategische aard zijn: de beslissing van Volkswagen om een eigen fabriek te bouwen in de Verenigde Staten, het vaststellen van de portfolio van produkt - markt - combinaties op lange termijn bij de corporate planning, het vaststellen van een structuurplan door een gemeente.
Tot dusverre zijn de toepassingen op problemen van operationele aard het meest talrijk. Toepassingen op strategische problemen zijn relatief aanzienlijk minder talrijk; op dit gebied liggen nog aanzienlijke mogelijkheden.

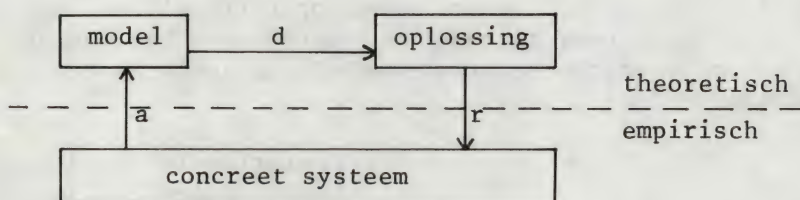
1.3. DOEL VAN HET BOEK

Het doel van dit boek is de student inzicht te verschaffen in de mogelijkheden en de beperkingen van kwantitatieve besluitvormingsmethoden. Daartoe is vanzelfsprekend een minimum aan kennis van deze technieken vereist.

1.4. DE MODELCYCLUS

1.4.1. DE MODELCYCLUS IN DE SYSTEEMLEER

In de systeemleer [2] kent men de modelcyclus [3]. Deze is schematisch weergegeven in figuur 1.1



- figuur 1.1.: De modelcyclus -

De modelcyclus is op iedere empirische wetenschap van toepassing. In de modelcyclus kan men drie fasen onderscheiden, te weten de fase van de abstractie (ook wel aangeduid als de modelbouw) de fase van de deductie en de fase van de realisatie (in figuur 2.1. aangeduid met de letters a, d en r). Een nadere verfijning van deze drie fasen is:

abstractie	1	formuleer het probleem
	2.	construeer het model
	3	verzamel de gegevens
	4	test het model
deductie	5	zoek de oplossing
realisatie	6	test de oplossing
	7	implementeer de oplossing

De voorgenoemde zeven fasen geven een indruk van de stadia die men bij het toepassen van kwantitatieve besluitvormingstechnieken in de praktijk zal moeten doorlopen. De gegeven volgorde suggereert tevens een tijdsvolgorde. Aan de hier gegeven tijdsvolgorde zal men echter bepaald niet in alle gevallen de hand willen of kunnen houden. Zo zal men bijvoorbeeld de fasen 2 en 3 in vele gevallen ook gelijktijdig of juist in omgekeerde volgorde doorlopen.
Wij bespreken nu de verschillende fasen aan de hand van een voorbeeld. Wij kiezen als voorbeeld een situatie, waarin aan een onderzoeker (men kan hier ook lezen: een organisatie-adviseur) wordt gevraagd behulpzaam te zijn bij een voorraadbeheersingsprobleem bij een groothandel.

1.4.2. HET FORMULEREN VAN HET PROBLEEM

De eerste stap bij het formuleren van het probleem bestaat uit het maken van een inventarisatie van de verschillen tussen de gewenste toestand en de werkelijke toestand waarin het concrete systeem zich bevindt. Daarbij zal men een aantal in de organisatie werkzame personen interviewen. Het is zeer goed denkbaar, dat verschillende personen verschillende visies hebben ten aanzien van de vraag wat als de meest gewenste toestand van het systeem wordt beschouwd.

In ons voorbeeld zou bijvoorbeeld de inkoper kunnen streven naar het plaatsen van grote bestellingen, teneinde op deze wijze de bestelkosten laag te houden. De verkoper zou kunnen streven naar een service-graad van 100%, d.w.z. naar zodanige voorraden dat iedere klantenorder steeds onmiddellijk uit voorraad kan worden geleverd. Tenslotte zou de financieringsman uit overwegingen van solvabiliteit en liquiditeit kunnen streven naar zo laag mogelijke investeringen in vaste activa (magazijnruimte) en vlottende activa (voorraden).

De fase van de probleemformulering moet dus in elk geval uitmonden in een goede kwalitatieve beschrijving van de doelstellingen van alle betrokkenen. In ons voorbeeld zou dit bijvoorbeeld kunnen zijn:
doelstelling 1: streef naar zo laag mogelijke kosten, waarbij met kosten wordt bedoeld de som van bestelkosten en voorraadkosten.

doelstelling 2: Streef naar een zo hoog mogelijke servicegraad.

In ons voorbeeld zou men de totale kosten (som van bestelkosten en voorraadkosten) kunnen aanduiden met u_1 en de servicegraad (dat is het gedeelte van de door klanten gevraagde hoeveelheden, dat direct uit voorraad kan worden geleverd) met u_2. Men noemt dan u_1 en u_2 de uitgangsvariabelen (outputvariables).

De tweede vraag, die men bij de probleemformulering moet beantwoorden is: ten aanzien van welke grootheden kan de organisatie zelf beslissingen nemen? Anders gezegd: wat zijn de beslissingsvariabelen (controlled variables)? In ons voorbeeld zouden beslissingsvariabelen kunnen zijn x_{i1} = de bestelhoeveelheid van produkt i en x_{i2} = het bestelniveau van produkt i. Tenslotte zal men zich moeten afvragen ten aanzien van welke grootheden die bij de probleemstelling een rol spelen, de organisatie zelf geen beslissingen kan nemen. Anders gezegd wat zijn de ingangsvariabelen (input variables, uncontrolled variables). In ons voorbeeld zouden uncontrolled variables kunnen zijn: y_{i1} = de levertijd van produkt i en y_{i2} = de vraag per periode naar produkt i.
De fase van de probleemstelling moet dus tevens uitmonden in een uitputtende beschrijving van alle beslissings- en ingangsvariabelen.

1.4.3. HET CONSTRUEREN VAN HET MODEL

1.4.3.1. SOORTEN MODELLEN

Er bestaan zeer veel verschillende soorten modellen. Wij geven in dit boek geen volledige beschrijving van de verschillende soorten modellen [4] maar volstaan met enkele indelingen die voor het vervolg van dit boek van belang zijn.

a. ICONISCHE, ANALOGE OF SYMBOLISCHE MODELLEN
Iconische modellen zijn schaalmodellen, bijvoorbeeld een schaalmodel van een te ontwerpen vliegtuig, waarvan bepaalde eigenschappen in een windtunnel worden beproefd.
Analoge modellen zijn modellen, waarbij een bepaalde verzameling van eigenschappen van het model wordt gebruikt als representatie van de verzameling van eigenschappen van het concrete systeem. Zo kan men bijvoorbeeld hydraulische modellen maken van economische systemen, waarbij vloeistofstromen in het model de geldstromen in het economische systeem representeren. Een ander bekend voorbeeld betreft een model, dat is ontworpen om de optimale plaats van een depot te vinden. Men neemt dan een horizontale tafel, plakt daarop een kaart waarop de geografische plaats van de klanten is aangegeven en boort overal waar een klant zich bevindt een gaatje in de tafel. Indien men nu door

al deze gaatjes een koordje haalt en aan de koordjes gewichten bevestigt, waarvan de grootte evenredig is met de door klanten afgenomen hoeveelheden en knoopt men de koordjes boven de tafel alle aan dezelfde ring dan zal de plaats van de ring de optimale plaats van het depot aangeven (daarbij zijn dan nog de volgende veronderstellingen gemaakt: 1e er is geen wrijving, 2e de transportkosten zijn gelijk aan afgelegde weg × hoeveelheid en 3e een rechte lijn op de kaart is een goede benadering van de transportafstand).
Symbolische modellen ook dikwijls aangeduid als *mathematische modellen* vormen het onderwerp van dit boek. Een stelsel van mathematische vergelijkingen representeert dan het concrete systeem.

b. OPTIMALISATIEMODELLEN EN BESCHRIJVENDE MODELLEN
Bij optimalisatiemodellen treft men steeds één of meer beslissingsvariabelen aan.
In een beschrijvend model zijn geen beslissingsvariabelen opgenomen. Het door ons in de voorgaande paragraaf geformuleerde voorraadbeheersingsprobleem leidt tot een mathematisch model van de volgende vorm (wij laten van nu af aan gemakshalve de index i weg):

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$$
$$u_2 = f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

Dit model is dus een optimalisatiemodel.

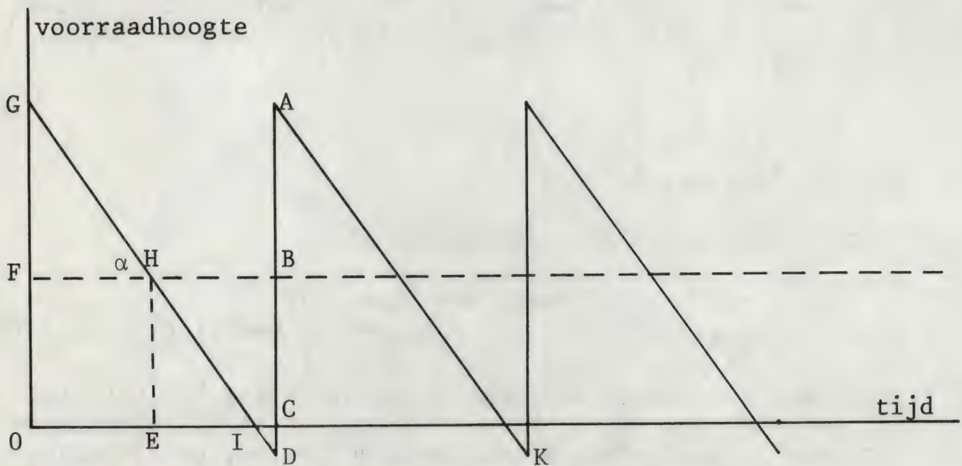
Voorbeelden van beschrijvende modellen zijn:
- de modellen gebruikt bij het voorspellen van tijdreeksen (bijvoorbeeld de exponential smoothing-modellen)
- een model voor de middellange termijnplanning bij ondernemingen dat werd opgesteld om de gevolgen van wijzigingen in te verkopen hoeveelheden, produktiecapaciteiten, de financiering van de onderneming enzovoorts snel te kunnen doorrekenen [5].

c. DETERMINISTISCHE VERSUS STOCHASTISCHE MODELLEN
In deterministische modellen zijn alle variabelen van deterministische aard, in een stochastisch model komen één of meer stochastische variabelen voor. (Een stochastische variabele is een variabele, waarvan de waarde niet met zekerheid bekend is, doch onderworpen is aan een kansverdeling.) In ons voorbeeld kan men bijvoorbeeld y_1 en y_2 beide als deterministisch opvatten (of dit een zinvolle representatie van het concrete systeem is moet blijken uit het waarnemen van het concrete systeem). Men spreekt dan van een deterministisch voorraadmodel. Dikwijls zal men echter situaties aantreffen waarbij men y_2 (= de vraag

per periode) als een stochastische variabele moet beschouwen. Hetzelfde geldt voor y_1 (= de levertijd). Zijn y_2 en/of y_1 stochastische variabelen dan spreekt men van een stochastisch voorraadmodel.
Zijn y_1 en/of y_2 stochastisch, dan zullen in het algemeen ook de uitgangsvariabelen u_1 en u_2 stochastisch zijn. Nu is men gewoonlijk niet zozeer geïnteresseerd in de waarden die u_1 en u_2 aannemen bij een bepaalde waarde van y_1 en y_2 als wel in de kansverdelingen van u_1 en u_2. Vaak zal men ook genoegen nemen met het leren kennen van bepaalde parameters van deze kansverdelingen, zoals bijvoorbeeld $E\{u_1\}$ en $\sigma^2\{u_1\}$ (respectievelijk de verwachtingswaarde en de variantie van u_1).

1.4.3.2. HET CONSTRUEREN VAN HET MODEL

Het gaat er nu om, dat wij de vorm van de functies f_1 en f_2 specificeren. Vatten wij y_1 en y_2 als deterministische variabelen op, dan kan men de vorm van de functies f_1 en f_2 als volgt specificeren:



- fig. 2.2. Een deterministisch voorraadmodel -

$OF = x_2$ = bestelniveau

$AD = x_1$ = bestelhoeveelheid

$EC = y_1$ = levertijd

$\tan \alpha = \frac{GF}{FH} = y_2$ = de vraag per periode

Wij beschouwen in totaal n perioden. Zij nu a = de bestelkosten per keer en b = de opslagkosten van één eenheid produkt gedurende één periode.

De servicegraad $u_2 = \frac{AC}{AD}$

$$AC = AD - CD$$

Teneinde CD te berekenen merken wij op dat

$$CD = BD - BC.$$

Hoek DHB is gelijk aan α; er geldt dus $\frac{BD}{HB} = \tan \alpha$

$$\Rightarrow BD = HB.\tan\alpha = y_1y_2$$

$$\Rightarrow CD = y_1y_2 - x_2$$

Men kan dit als volgt interpreteren:
CD = de grootte van de "neenverkoop", dat wil zeggen de hoeveelheid gevraagde goederen, die men niet onmiddellijk uit voorraad kan leveren. Deze hoeveelheid is gelijk aan de vraag gedurende de levertermijn y_1y_2 verminderd met het bestelniveau x_2.

Wij veronderstellen dat degene, die uiteindelijk een beslissing moet nemen over de grootte van de bestelhoeveelheid en de hoogte van het bestelniveau alleen waarden van x_1 en x_2 in beschouwing neemt die voldoen aan

$$x_1 \geq y_1y_2$$

en

$$0 \leq x_2 \leq y_1y_2$$

Er geldt nu:

$$u_2 = \frac{AC}{AD} = \frac{AD - CD}{AD} = \frac{x_1 + x_2 - y_1y_2}{x_1}$$

Met bovengenoemde veronderstellingen geldt nu

$$0 \leq u_2 \leq 1$$

Het aantal bestellingen gedurende n perioden is $\frac{n\,y_2}{x_1}$. De bestelkosten gedurende n perioden zijn dus $\frac{any_2}{x_1}$.

De hoogte van de voorraad bedraagt gemiddeld $\frac{1}{2}OG = \frac{1}{2}(AD-CD) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1y_2)$.

Zou deze voorraad gedurende n perioden aanwezig zijn, dan zouden de voorraadkosten bedragen:

$$\tfrac{1}{2}b(x_1 + x_2 - y_1y_2)n$$

Deze voorraad is echter slechts een bepaald gedeelte van de tijd n.l. $\frac{OI}{OC}$ aanwezig.

De voorraadkosten gedurende n perioden bedragen dus

$$\tfrac{1}{2}b(x_1 + x_2 - y_1y_2) \cdot \frac{OI}{OC} \cdot n$$

Om de verhouding $\frac{OI}{OC}$ te berekenen merken wij op

$$DK = OC$$

en

$$\frac{AD}{DK} = \tan\alpha \Rightarrow DK = \frac{x_1}{y_2}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{x_1}{y_2}$$

$$OI = OC - IC = \frac{x_1}{y_2} - y_1 + \frac{x_2}{y_2}$$

$$\Rightarrow \frac{OI}{OC} = \frac{y_2}{x_1} \cdot \{\frac{x_1}{y_2} - y_1 + \frac{x_2}{y_2}\} = \frac{x_1 + x_2 - y_1y_2}{x_1}$$

De voorraadkosten gedurende n perioden bedragen dus

$$\tfrac{1}{2}b(x_1 + x_2 - y_1y_2) \cdot \frac{x_1 + x_2 - y_1y_2}{x_1} \cdot n$$

Het mathematische model voor dit probleem bestaat dus uit een stelsel van 2 vergelijkingen, n.l.:

$$u_1 = \frac{any_2}{x_1} + \tfrac{1}{2}b \cdot \frac{(x_1 + x_2 - y_1y_2)^2}{x_1} \cdot n$$

$$u_2 = \frac{x_1 + x_2 - y_1y_2}{x_1}$$

1.4.4. HET VERZAMELEN VAN GEGEVENS

De voor het model benodigde gegevens zijn grotendeels van kwantitatieve aard. Vaak zal een groot deel van de gegevens in verschillende delen van de organisatie in één of andere vorm wel beschikbaar zijn. Op de technieken die bij het verzamelen van gegevens kunnen worden gebruikt gaan wij hier niet in.

1.4.5. HET TESTEN VAN HET MODEL

Men kan het geconstrueerde model op twee wijzen testen. De eerste manier is een onderzoek naar de *logische consistentie* van het model. Zijn uit het model tegenstrijdige uitspraken af te leiden, dan is het logisch inconsistent. Er is dan bij de modelconstructie een denkfout gemaakt. Dit onderzoek naar de logische consistentie vindt geheel plaats binnen het model.
De tweede manier waarop een model kan worden getest is door te onderzoeken of het model met een voldoende mate van nauwkeurigheid de werkelijkheid representeert. Bij het in paragraaf 1.4.3.2. gegeven voorbeeld kan men bijvoorbeeld de in de praktijk (in het concrete systeem) gehanteerde waarden voor x_1 en x_2 invullen. Men verkrijgt dan een voorspelling voor u_1 en u_2. De toets bestaat dan hieruit dat men de in de praktijk optredende waarden van u_1 en u_2 vergelijkt met de aldus verkregen voorspelde waarden.
Is het model stochastisch, dan zal men bij het vergelijken van de voorspelde en de in het concrete systeem gerealiseerde waarden een statistische toets moeten toepassen.

1.4.6. HET ZOEKEN VAN DE OPLOSSING

De volgende fase in de modelcyclus is die van de deductie, d.w.z. die van het trekken van conclusies uit het model. Daarbij kan men op twee manieren te werk gaan: door middel van analytische methoden dan wel door middel van simulatie. Hier ontmoeten wij een vierde indeling van modellen naast de drie in paragraaf 1.4.3.1. reeds vermelde indelingen, namelijk die van analytische modellen versus simulatie-modellen. Bij analytische modellen gebruikt men bepaalde wiskundige methoden om de oplossing te vinden, bijvoorbeeld de differentiaalrekening. In ons voorbeeld kan men zich bijvoorbeeld afvragen onder welke voorwaarden de totale kosten (= u_1) minimaal worden.

Bij een gegeven servicegraad u_2 = s geldt:

$$s = \frac{x_1 + x_2 - y_1 y_2}{x_1}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{any_2}{x_1} + \tfrac{1}{2}b \cdot \frac{s^2\, x_1{}^2}{x_1} \cdot n$$

$$u_1 = \frac{any_2}{x_1} + \tfrac{1}{2}bs^2\, x_1 n$$

u_1 is minimaal als

$$\frac{du_1}{dx_1} = 0,$$

dus als

$$-\frac{any_2}{x_1{}^2} + \tfrac{1}{2}bs^2\, n = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{2ay_2}{b}}$$

en de waarde van u_1 is dan:

$$u_1 = \frac{any_2}{\sqrt{\frac{2ay_2}{bs^2}}} + \tfrac{1}{2}bs^2 \sqrt{\frac{2ay_2}{bs^2}} \cdot n$$

$$\Rightarrow u_1 = ns\,\sqrt{2bay_2}$$

Bij simulatiemodellen wordt de werkelijkheid nagespeeld om een oplossing te verkrijgen. Simulatiemodellen kunnen in principe zowel deterministisch als stochastisch zijn.

1.4.7. HET TESTEN VAN DE OPLOSSING

Bij het testen van de oplossing kan men weer twee wegen bewandelen. Men kan in de eerste plaats de oplossing testen binnen het model. In ons voorbeeld zou men waarden voor x_1 die niet gelijk zijn aan $\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2ay_2}{b}}$ kunnen substitueren in u_1. Bij een dergelijke toets gaat men uitsluitend na of de mathematische bewerkingen die zijn uitgevoerd om de oplossing te vinden, correct zijn.
In de tweede plaats kan men de oplossing toetsen in de werkelijkheid. In ons voorbeeld zou men de gevonden oplossing bijvoorbeeld voor een deel van het assortiment kunnen invoeren. De toets bestaat dan hierin, dat men nagaat of dit inderdaad leidt tot lagere kosten dan voor een vergelijkbare groep artikelen, waarvoor men het bestaande systeem van voorraadbeheersing voortzet.

Bij deze toets gaat het om de vraag of het model het concrete systeem voldoende nauwkeurig weergeeft.

1.4.8. IMPLEMENTATIE

De implementatie zal in het algemeen geleidelijk geschieden. De fase van testen zoals in de voorgaande paragraaf beschreven, gaat dan geleidelijk over in implementatie. Dikwijls bestaan er weerstanden in de organisatie tegen veranderingen. Wij gaan daar hier niet op in.

1.5. MODELLEN ALS BENADERING VAN CONCRETE SYSTEMEN

Bij het construeren van een model zal men steeds het model enerzijds de werkelijkheid zo goed mogelijk willen laten benaderen terwijl het model anderzijds gemakkelijk oplosbaar moet zijn. Men zal vrijwel steeds een compromis moeten sluiten, waarbij aan beide doeleinden zo goed mogelijk recht wordt gedaan. Men kan de werkelijkheid onder andere vereenvoudigen door
- het weglaten van bepaalde variabelen
- het aggregeren van variabelen
- het veranderen van het karakter van variabelen (bijvoorbeeld een stochastische variabele vervangen door een deterministische, of een discrete variabele door een continue variabele)
- het veranderen van de relatie tussen twee of meer variabelen (bijvoorbeeld het vervangen van een kromlijnig verband door een rechtlijnig verband).

1.6. PROTOTYPE-PROBLEMEN

Er zijn gedurende het bestaan van de operationele research zeer vele problemen opgelost, die men in een aantal prototypen kan indelen. Kennis van deze prototypen is buitengewoon nuttig, indien men voor een bepaald probleem zelf een model wil construeren. In zeer vele gevallen kan men zelfs volstaan met het gebruiken van een bestaand prototype-model. In bepaalde gevallen kan men dan van kant en klare computer programma's gebruik maken bij het zoeken van de oplossing.
Men kent de volgende prototype-problemen:
- allocatie-vraagstukken
- voorraadbeheersingsproblemen
- wachttijdproblemen
- netwerkproblemen
- vervangingsproblemen.

In dit boek bespreken wij uitsluitend allocatievraagstukken. Voor het oplossen van allocatievraagstukken gebruikt men mathematische programmeringstechnieken.

2. LINEAIRE PROGRAMMERING MET TWEE VARIABELEN

2.1. INLEIDING

Wij geven eerst een voorbeeld van een lineair programmeringsprobleem. Stel een onderneming heeft bepaalde gegeven capaciteiten van verschillende types machines, een gegeven grootte van het personeelsbestand en wellicht eveneens beperkte voorraden grondstoffen. De onderneming kan verschillende produkten maken. Voor ieder produkt kent men de verkoopprijs, de variabele kosten en het beslag per eenheid produkt op de verschillende types machines en arbeid evenals de benodigde grondstoffen per eenheid produkt.
Welke produkten (en welke hoeveelheden van die produkten) moet men fabriceren indien men streeft naar een zo groot mogelijke winst? Dit is een lineair programmeringsprobleem.
Men kan ook zeggen, dat men uit een groot aantal mogelijke activiteiten (n.l. alle denkbare produkten in alle denkbare hoeveelheden), een aantal activiteiten moet kiezen op zodanige wijze, dat ten eerste aan alle restricties (de beperkte machine-capaciteiten, de beperkte hoeveelheden arbeid en grondstoffen) is voldaan en ten tweede een doelstellingsfunctie (de winst) wordt gemaximaliseerd.

2.2. EEN VOORBEELD VAN EEN ONDERNEMING MET TWEE PRODUKTEN

Wij beperken ons aanvankelijk tot een onderneming, die slechts twee produkten kan fabriceren. Wij noemen deze produkten A en B. Van deze produkten zijn de volgende gegevens bekend:

	produkt A	produkt B
Verkoopprijs	80	55
Grondstoffen	35	25
Dekking	45	30

Produkt A levert dus een dekking van ƒ 45,- per eenheid produkt en produkt B een dekking van ƒ 30,- per eenheid produkt. Wij gaan er in deze opstelling van uit dat alle kosten met uitzondering van de grondstofkosten als vaste kosten moeten worden beschouwd. De onderneming heeft twee machines beide met een gegeven capaciteit.
Voorts is de hoeveelheid arbeid gegeven; wij gaan er dus van uit dat de onderneming gedurende de planperiode geen werknemers kan aantrekken of ontslaan. Het capaciteitsbeslag per eenheid produkt is gegeven in tabel 2.1.

	Produkt A	Produkt B	Max. beschikbaar
Machine 1	2	1	120
Machine 2	1	2	140
Arbeid	1	1	80

- tabel 2.1. Capaciteitsbeslag en beschikbare capaciteiten beide uitgedrukt in uren -

2.3. EEN INTUITIEVE BENADERING

Bij het zoeken van oplossingen zou men als volgt kunnen redeneren: indien de onderneming alleen produkt A gaat produceren kan zij daarvan maximaal 60 eenheden maken (60 is het kleinste van de drie getallen 120/2, 140/1, 80/1). De in totaal behaalde dekking bedraagt dan 60 × 45 = ƒ 2.700,-. Van produkt B zou men maximaal kunnen maken 70 eenheden (70 is het kleinste van de drie getallen 120/1, 140/2, 80/1). De in totaal behaalde dekking bedraagt 70 × 30 = ƒ 2.100,-. Het produceren van 60 eenheden A levert dus een hogere dekking dan het produceren van 70 eenheden B. Men zou aldus in eerste instantie kunnen besluiten 60 eenheden A te gaan produceren. Bij dat produktieprogramma is machine 1 volbezet; er is echter nog wel ruimte op machine 2, terwijl tevens niet alle arbeid is bezet. Van machine 2 zijn nog onbezet 140 - 60 = 80 uren, terwijl het aantal nog niet benutte arbeidsuren 80 - 60 = 20 bedraagt. Stel nu dat men toch nog één eenheid van produkt B zou willen fabriceren. Om na te gaan of hierdoor nu de totaal behaalde dekking toeneemt moet men aan produkt B de capaciteitskosten van machine 1 toerekenen. Welke capaciteitskosten moet men toerekenen? Het antwoord luidt:
de opportunity-cost, die ontstaat omdat men door B te willen maken nu minder van A moet gaan maken [6]. Om één eenheid B te kunnen maken zal men ½ eenheid A moeten opofferen, dus in plaats van 60 eenheden A genoegen moeten nemen met 59,5 eenheden A (door ½ eenheid A minder te maken komt er op machine 1 precies

genoeg capaciteit vrij om één eenheid van B te kunnen maken).
De opportunity-cost als bovenbedoeld is dus ƒ 22,50 per machine-uur van machine 1. Dit getal van ƒ 22,50 noemt men de *imputed-cost* van machine 1.
Men kan nu de bijdrage van produkt B tot de totale dekking als volgt evalueren: ƒ 30,- - ƒ 22,50 = ƒ 7,50. Dit getal van ƒ 7,50 per eenheid voor produkt B noemt men de *reduced revenue* van produkt B.
Wij hebben dus geconcludeerd, dat door ½ eenheid van produkt A minder te maken en in plaats daarvan één eenheid van produkt B te produceren de behaalde dekking met ƒ 7,50 toeneemt. Men kan dit als volgt eenvoudig controleren: 59,5 * 45 + 1 * 30 = 2707,50.
Men kan nu ook nog eens een halve eenheid A "inruilen" voor één eenheid B: 59 * 45 + 2 * 30 = 2715,00.
Ruilt men een halve eenheid A voor één eenheid B, dan betekent dit echter wel dat 3/2 uur extra van machine 2 en tevens ½ uur extra arbeid moet worden ingeschakeld. Op een gegeven moment zal men dus de grens van de maximaal beschikbare hoeveelheid arbeid of de maximale capaciteit van machine 2 bereiken. Welke van de twee grenzen het eerst wordt bereikt vindt men door te vergelijken $\frac{20}{1/2}$ en $\frac{80}{3/2}$. In de teller van deze breuken staat de nog onbezette capaciteit, in de noemer het extra capaciteitsbeslag veroorzaakt door ½ eenheid A te ruilen voor één eenheid B. Van beide breuken $\frac{20}{1/2} = 40$ en $\frac{80}{3/2} = 53,3$ is de eerste de kleinste.
Dit houdt in dat men 40 maal een dergelijke ruil kan toepassen en dat dan alle arbeid volledig is bezet. Na 40 maal een dergelijke ruil te hebben uitgevoerd hebben wij als produktieprogramma: 40 eenheden A en 40 eenheden B. De dekking is dan 40 * 45 + 40 * 30 = 3000.

Dit is tevens het optimale programma, zoals wij in de volgende paragraaf zullen laten zien.

2.4. CONSTRUCTIE VAN HET MATHEMATISCH MODEL

Vanwege de beperkte produktiecapaciteiten zijn er grenzen aan de hoeveelheden, die men van de produkten A en B kan produceren. Noemen wij x_1 = het aantal eenheden van produkt A en x_2 = het aantal eenheden van produkt B, dan moet gelden:

$2x_1 + x_2 \leq 120$ (machine 1)

$x_1 + 2x_2 \leq 140$ (machine 2)

$x_1 + x_2 \leq 80$ (arbeid)

Wij zoeken nu zodanige waarden van x_1 en x_2, dat de waarde van de uitdrukking $45x_1 + 30x_2$ zo groot mogelijk wordt, terwijl tevens aan bovenstaande ongelijkheden is voldaan. Wij kunnen dus voor het in paragraaf 2.2. gestelde probleem het volgende mathematische model construeren:

Maximeer

$$45x_1 + 30x_2$$

Onder de randvoorwaarden

$$2x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 140$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

De uitdrukking $45x_1 + 30x_2$ noemt men de doelstellingsfunctie (objective function, goalfunction), de boven vermelde ongelijkheden noemt men de randvoorwaarden of de restricties (restrictions, constraints).
Meer algemeen kunnen wij bovenstaand model ook als volgt beschrijven:

Maximeer

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

onder de randvoorwaarden

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3$$

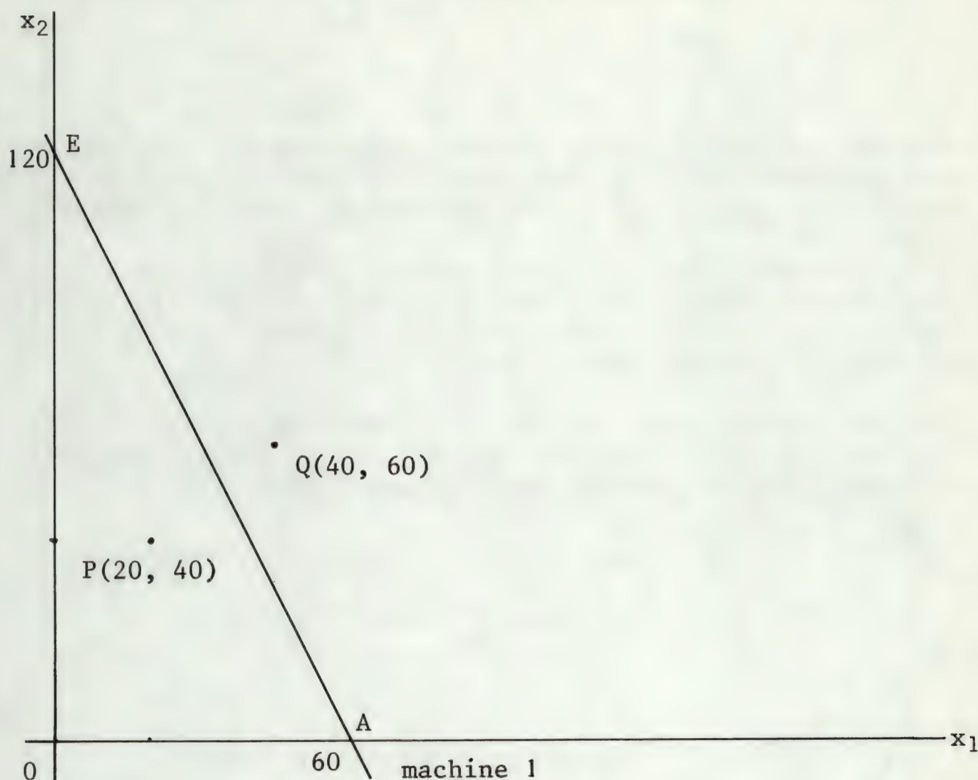
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

De getallen c_1, c_2, b_1, b_2, b_3, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32} noemt men de parameters van het model. De numerieke waarden van deze parameters liggen vast.

2.5. DE GRAFISCHE OPLOSSINGSMETHODE

Wij kunnen op zeer eenvoudige wijze grafisch aangeven welke produktieprogramma's technisch wel en niet mogelijk zijn. In het

x_1, x_2-vlak tekenen wij daartoe eerst de rechte lijn met de vergelijking $2x_1 + x_2 = 120$. Zie figuur 2.1.



- figuur 2.1. Gebied van mogelijke oplossingen, als alleen machine 1 in beschouwing wordt genomen -

Het punt P (20, 40) in figuur 2.1. representeert een produktieprogramma $x_1 = 20$ en $x_2 = 40$. Daarvoor geldt $2 * 20 + 1 * 40 < 120$, hetgeen inhoudt dat dit produktieprogramma wat betreft de capaciteit van machine 1 mogelijk is. Het punt Q (40, 60) representeert een produktieprogramma dat niet mogelijk is, omdat dan de capaciteit van machine 1 wordt overschreden: $2 * 40 + 1 * 60 > 120$. Verder zijn natuurlijk negatieve waarden van x_1 en x_2 niet mogelijk. Wij concluderen dus, dat alleen die produktieprogramma's, die kunnen worden weergegeven door een punt binnen of juist op de grens van driehoek OAE, gezien de capaciteit van machine 1 mogelijk zijn.

In figuur 2.2. hebben we de drie lijnen

$$2x_1 + x_2 = 120$$

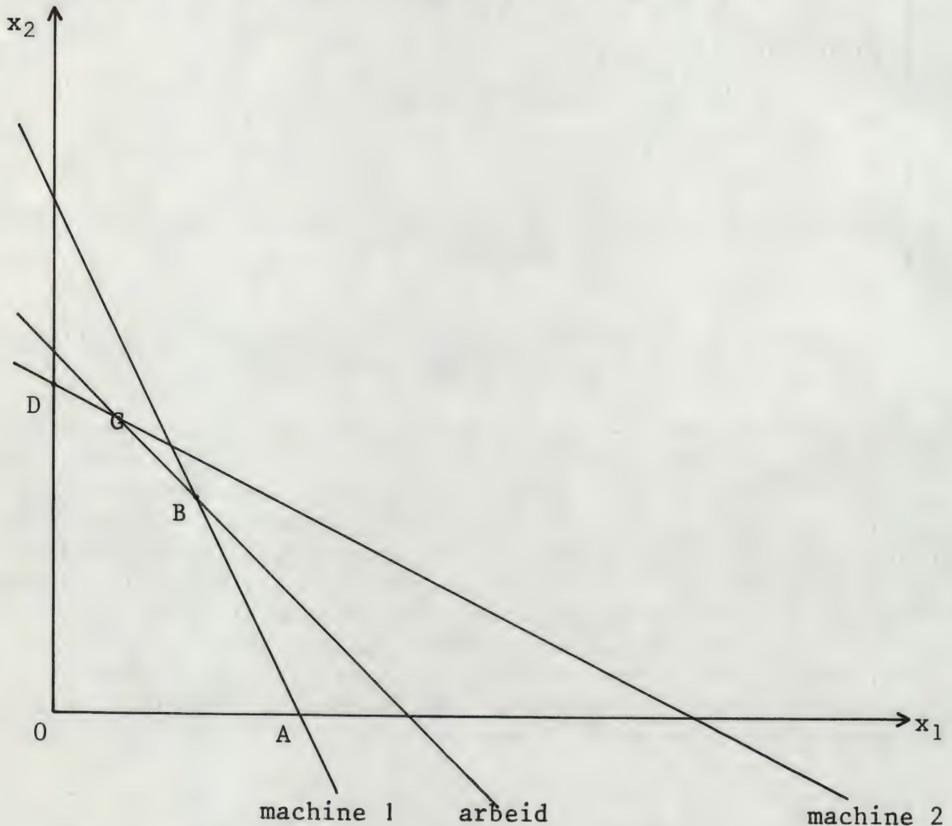
$$x_1 + 2x_2 = 140$$

$$x_1 + x_2 = 80$$

alle drie getekend. Alleen produktieprogramma's die kunnen worden weergegeven door een punt binnen of juist op de grens van de veelhoek OABCD zijn voor de onderneming technisch gezien mogelijk.

Men noemt het gebied OABCD het *"area of feasible solutions"*.
Een *"feasible solution"* is een oplossing, die aan alle restricties voldoet (in ons voorbeeld is een feasible solution een oplossing die technisch mogelijk is).

Het probleem is nu dat wij uit de verzameling van feasible solutions, die oplossing moeten kiezen, die de grootst mogelijke dekking geeft. Wij beschouwen daartoe figuur 2.3.



- figuur 2.2. Het "area of feasible solutions" -

In figuur 2.3. beschouwen wij eerst de lijn L_1. De lijn L_1 heeft als vergelijking:

$$45x_1 + 30x_2 = 1350$$

Anders gezegd: de verzameling van produktieprogramma's met een dekking van 1350 wordt weergegeven door de lijn L_1 (alleen dat gedeelte van lijn L_1, dat in het eerste kwadrant ligt). De verzameling van produktieprogramma's met een dekking van 1800 wordt weergegeven door de lijn L_2. Lijn L_2 is evenwijdig met lijn L_1. Trekt men een willekeurige lijn evenwijdig met L_1, dan representeert deze lijn een verzameling oplossingen die alle dezelfde dekking geven. Hoe groter de afstand van de oorsprong tot de betreffende lijn, des te groter is deze dekking. Lijn L_4 bevat nog juist één punt van het area of feasible solutions, n.l. punt B. Punt B is derhalve van alle feasible solutions degene die de hoogste dekking heeft.

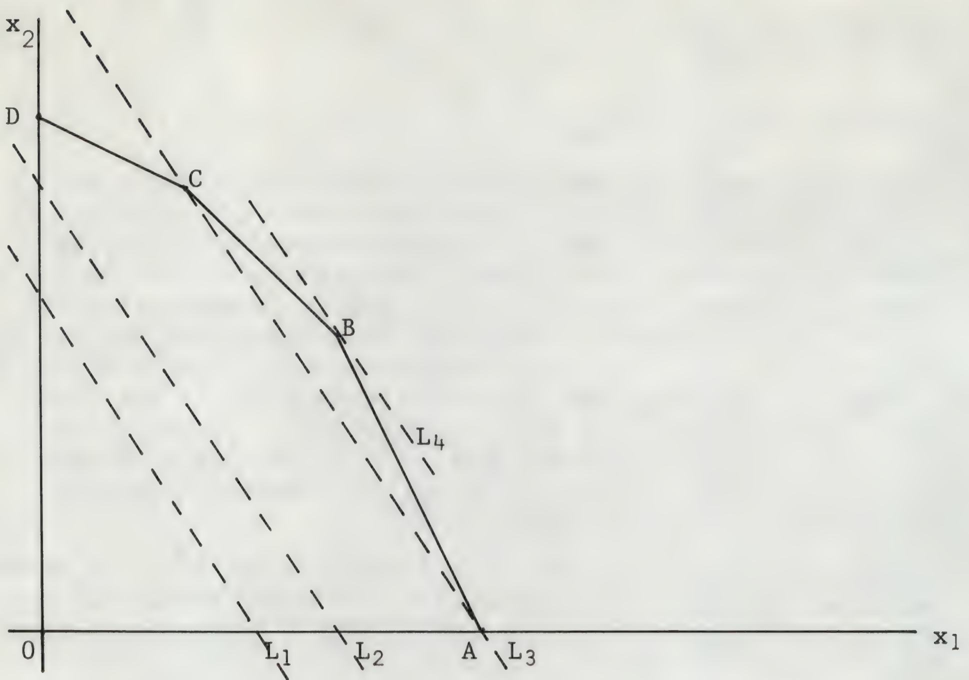
De exacte coördinaten van B vinden wij door het snijpunt te bepalen van de lijnen overeenkomend met de restricties voor machine 1 en arbeid (zie figuur 2.2.). Punt B is dus het snijpunt van

$$2x_1 + x_2 = 120$$

en

$$x_1 + x_2 = 80$$

Oplossen van dit stelsel levert $x_1 = 40$, $x_2 = 40$. Het optimale produktieprogramma is dus 40 eenheden B.
De behaalde dekking is dan $45 * 40 + 30 * 40 = 3000$.



- figuur 2.3.

2.6. AANNAMES VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

De methode van de lineaire programmering is gebaseerd op een aantal veronderstellingen. Deze zijn:

a. *Lineariteit van de doelstellingsfunctie*
De doelstellingsfunctie moet de vorm $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ hebben.
Doelstellingsfuncties als bijvoorbeeld:

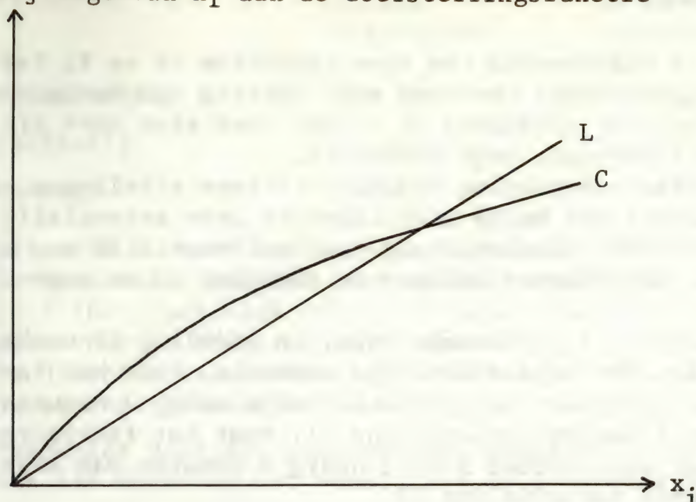
$$c_1x_1 + c_2x_1^2 + c_3x_2 + ...$$

of

$$c_1x_1 + c_2x_1x_2 + ...$$

voldoen niet aan deze eis van lineariteit.
De eis van lineariteit betekent, dat:

1e de bijdrage van activiteit i aan de doelstellingsfunctie onafhankelijk is van de niveaus van de andere activiteiten en
2e deze bijdrage recht evenredig is met het niveau van activiteit i.



- figuur 2.4. Een lineair en een niet-lineair verband tussen x_i en de bijdrage van x_i aan de doelstellingsfunctie -

Van de in figuur 2.4. gegeven verbanden tussen x_i en de bijdrage van x_i aan de doelstellingsfunctie, leidt dus alleen het door lijn L aangegeven verband tot een lineair programmeringsmodel.

b. *Lineariteit van de restricties*
Het beslag van de verschillende activiteiten op de beperkte capaciteiten moet eveneens leiden tot een lineair verband. Dit houdt in:

1e het capaciteitsbeslag van activiteit i per eenheid produkt is niet afhankelijk van de vraag in hoeverre andere activiteiten eveneens beslag leggen op deze capaciteit en

2e dit capaciteitsbeslag is niet afhankelijk van het niveau van activiteit i.

c. *Deelbaarheid*
Wij hebben tot dusverre steeds verondersteld, dat de beslissingsvariabelen x_1 en x_2 continue variabelen zijn. Zijn één of meer beslissingsvariabelen discreet (bijvoorbeeld: x_1 moet een niet-negatief geheel getal zijn), dan is aan de veronderstelling van deelbaarheid van iedere activiteit niet voldaan. Veronderstellen wij dat de in dit hoofdstuk besproken onderneming een raffinaderij is, dan is aan de eis van deelbaarheid voldaan.

Tenslotte merken wij nog op dat het lineaire programmeringsmodel kan worden gekarakteriseerd als: een deterministisch optimalisatiemodel.

2-5. Gegeven is het volgende LP-model.
Maximeer

$$10x_1 + 12x_2$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 = 25$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 40$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Geef in een grafiek het gebied van de feasible solutions aan.
Hoe luidt de optimale oplossing?
Welke waarde heeft de doelstellingsfunctie in de optimale oplossing?
Een der restricties is in dit model overbodig (redundant).
Welke restrictie is dat?

2-6. Gegeven is het volgende LP-model.
Maximeer

$$2x_1 - x_2$$

onder de voorwaarden

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Heeft dit model feasible solutions?
Heeft dit model een optimale oplossing?

2-7. Een bouwonderneming moet voor een gebied met een oppervlakte van één hectare een bouwplan opstellen. Men overweegt de bouw van woningen in acht verdiepingen en de bouw van winkels in twee verdiepingen. Daarbij heeft men te maken met de volgende beperkingen:

1. Op grond van de bestaande voorschriften mag de verhouding vloeroppervlak : grondoppervlak voor woningen niet groter zijn dan 2. Ook voor de winkels geldt dat de verhouding tussen het vloeroppervlak en het grondoppervlak niet groter mag zijn dan 2. Daarnaast moet binnen de beschikbare oppervlakte van één hectare een parkeerterrein worden aangelegd en wel zo, dat voor iedere 50 m^2 winkelvloeroppervlak één parkeer-

plaats met een grondoppervlak van 25 m^2 wordt gerealiseerd.

2. Tenminste 30% van de beschikbare oppervlakte moet worden besteed aan groenvoorzieningen. Dit betekent dat het grondoppervlak van de te bouwen woningen (dat gelijk is aan 1/8 van het te bouwen vloeroppervlak, omdat de woningen worden gebouwd in acht verdiepingen) plus het grondoppervlak van de te bouwen winkels (dat gelijk is aan de helft van het te realiseren vloeroppervlak, omdat winkels worden gebouwd in twee verdiepingen) plus de parkeerplaatsen tezamen ten hoogste 70% van het beschikbare grondoppervlak mogen beslaan.
3. De bouw van woningen en winkels veroorzaakt een additionele luchtvervuiling. Uit metingen is gebleken dat één m^2 winkelruimte 3 eenheden luchtvervuiling veroorzaakt, terwijl dit voor één m^2 woonruimte slechts 1 eenheid bedraagt. De maximaal toelaatbare extra luchtvervuiling is gesteld op 30.000 eenheden.
4. De bouw van de woningen en de winkels moet door de bouwonderneming worden voorgefinancierd. In het onderhavige projekt wenst men ten hoogste *f* 40 miljoen te investeren. Voor de bouw van één m^2 woonruimte is een voorfinanciering nodig van *f* 3000,--; voor winkelruimte is dit *f* 4000,--. (Aanwijzing: formuleer deze restrictie in eenheden van *f* 1000,--.)
5. De gemeente wenst aan het gebied een duidelijke winkelfunctie toe te kennen; het aantal m^2 winkelruimte moet tenminste 1000 plus de helft van het aantal te realiseren m^2 woonruimte bedragen.

De bouwonderneming verwacht met de bouw van woningen en winkels een brutowinst van *f* 200,-- per m^2 woningruimte en *f* 400,-- per m^2 winkelruimte te kunnen behalen. De bouwonderneming wil binnen de gegeven restricties een bouwplan opstellen, dat een zo groot mogelijke brutowinst oplevert.

a) Formuleer dit probleem als een LP-probleem.
b) Los het probleem grafisch op.

2-8. Gegeven is het volgende LP-probleem.
Maximeer

$$2x_1 + x_2$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 \leqq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leqq 14$$
$$-x_1 + 2x_2 \geqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

Geef in een grafiek het gebied van de feasible solutions en de optimale oplossing aan.

2-9. Een oliemaatschappij beschikt over drie soorten dieselolie (aan te duiden met A, B en C). Het soortelijk gewicht en het zwavelgehalte van deze drie soorten dieselolie is gegeven in onderstaande tabel.

	A	B	C
soortelijk gewicht	0,90	0,92	0,86
zwavelgehalte in %	0,28	0,38	0,33

Deze oliemaatschappij wenst nu door menging van deze drie soorten dieselolie een dieselolie te verkrijgen met een soortelijk gewicht, dat ten minste gelijk is aan 0,89 en met een zwavelgehalte van ten hoogste 0,34%.
De oliemaatschappij kan onbeperkte hoeveelheden van de soorten A, B en C inkopen, tegen prijzen van respectievelijk 13 cent, 9 cent en 10 cent per liter.
Men wenst het mengsel zodanig samen te stellen dat het zo goedkoop mogelijk is, maar toch aan de eisen met betrekking tot soortelijk gewicht en zwavelgehalte voldoet.

a) Formuleer dit probleem als een LP-probleem met twee variabelen.
b) Los het probleem op met behulp van de grafische oplossingsmethode.

3. SCHADUWPRIJZEN, PARAMETRISCH PROGRAMMEREN EN GEVOELIGHEIDSANALYSE

3.1. SCHADUWPRIJZEN

Wij veronderstellen thans, dat de onderneming uit hoofdstuk 2, overweegt de capaciteit van machine 1 uit te breiden zo dat 1 uur per week extra ter beschikking komt. In plaats van 120 uur staat de onderneming dan 121 uur ter beschikking. Alvorens tot deze capaciteitsuitbreiding over te gaan wil de onderneming weten, in hoeverre de behaalde dekking toeneemt door het ter beschikking krijgen van 1 uur extra van machine 1. In figuur 3.1. hebben wij de nieuwe situatie in beeld gebracht. Het optimum verschuift nu van B naar B_1. B_1 is het snijpunt van

$$2x_1 + x_2 = 121$$

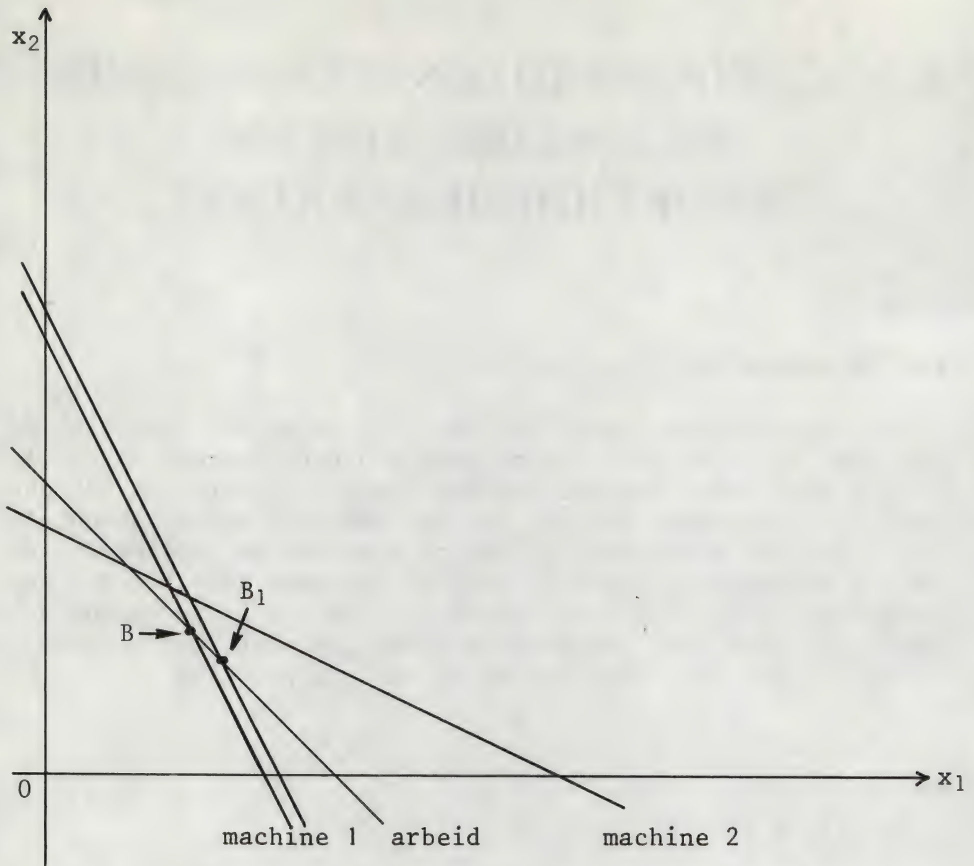
en

$$x_1 + x_2 = 80$$

De coördinaten van B_1 zijn dus $x_1 = 41$ en $x_2 = 39$.
De met B_1 overeenkomende dekking bedraagt:

$$45 * 41 + 30 * 39 = 3015.$$

Ten opzichte van de oude situatie is de behaalde dekking dus toegenomen met 15.
Men zegt nu: de schaduwprijs van restrictie 1 is gelijk aan 15.
Anders gezegd: de schaduwprijs van een restrictie is gelijk aan de marginale toeneming van de doelstellingsfunctie als gevolg van een marginale verruiming van die restrictie, onder de veronderstelling, dat alle andere restricties ongewijzigd blijven.
De laatste toevoeging (de ceteris paribus clausule) is essentieel voor de definitie van het begrip schaduwprijs.
De onderneming zal nu overgaan tot uitbreiding van de capaciteit van machine 1, indien de kosten van deze capaciteitsuitbreiding kleiner zijn dan de schaduwprijs van restrictie 1.



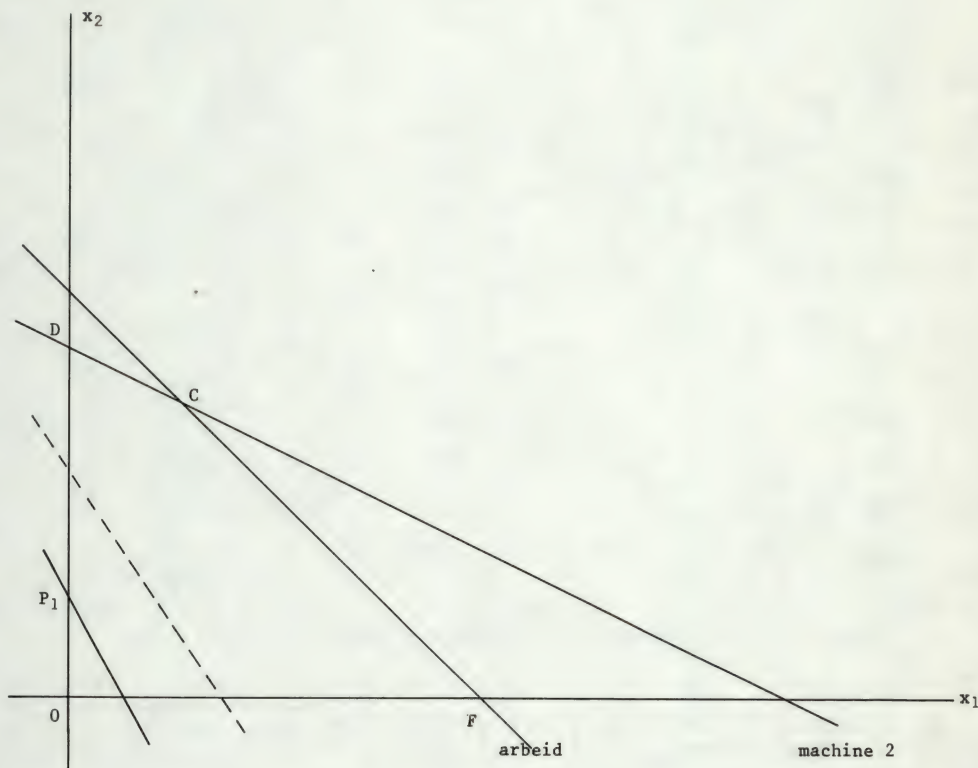
- figuur 3.1. De schaduwprijs van restrictie 1 -

Men kan de schaduwprijs ook interpreteren als de opportunity costs van het niet ter beschikking hebben van één extra capaciteitseenheid van machine 1. Zijn deze opportunity costs hoger dan de werkelijke kosten, die men voor het verkrijgen van één extra capaciteitseenheid zou moeten maken, dan moet men tot uitbreiding overgaan.

3.2. PARAMETRISCH PROGRAMMEREN

In paragraaf 3.1. varieerden wij de constante in het rechterlid van restrictie 1 met één eenheid. Wij variëren thans deze constante, b_1, over een groot gebied, n.l. van 0 tot 200. Wij veronderstellen daarbij dat er overigens in de formulering van het model geen wijzigingen optreden. Wij willen thans onderzoeken

in hoeverre de waarde van de doelstellingsfunctie verandert als wij b_1 stapsgewijs variëren van 0 tot 200.
Deze veranderingen geven wij aan in tabel 3.1. Wij beschouwen nu figuur 3.2. In figuur 3.2. hebben wij getekend de ongewijzigde restricties 2 en 3. Indien wij restrictie 1 buiten beschouwing laten is OFCD het area of feasible solutions.
Als $b_1 = 0$ moet gelden $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$. Wij noemen de waarde van de doelstellingsfunctie $z = 45x_1 + 30x_2$. Als $b_1 = 0$ is dus ook $z = 0$.

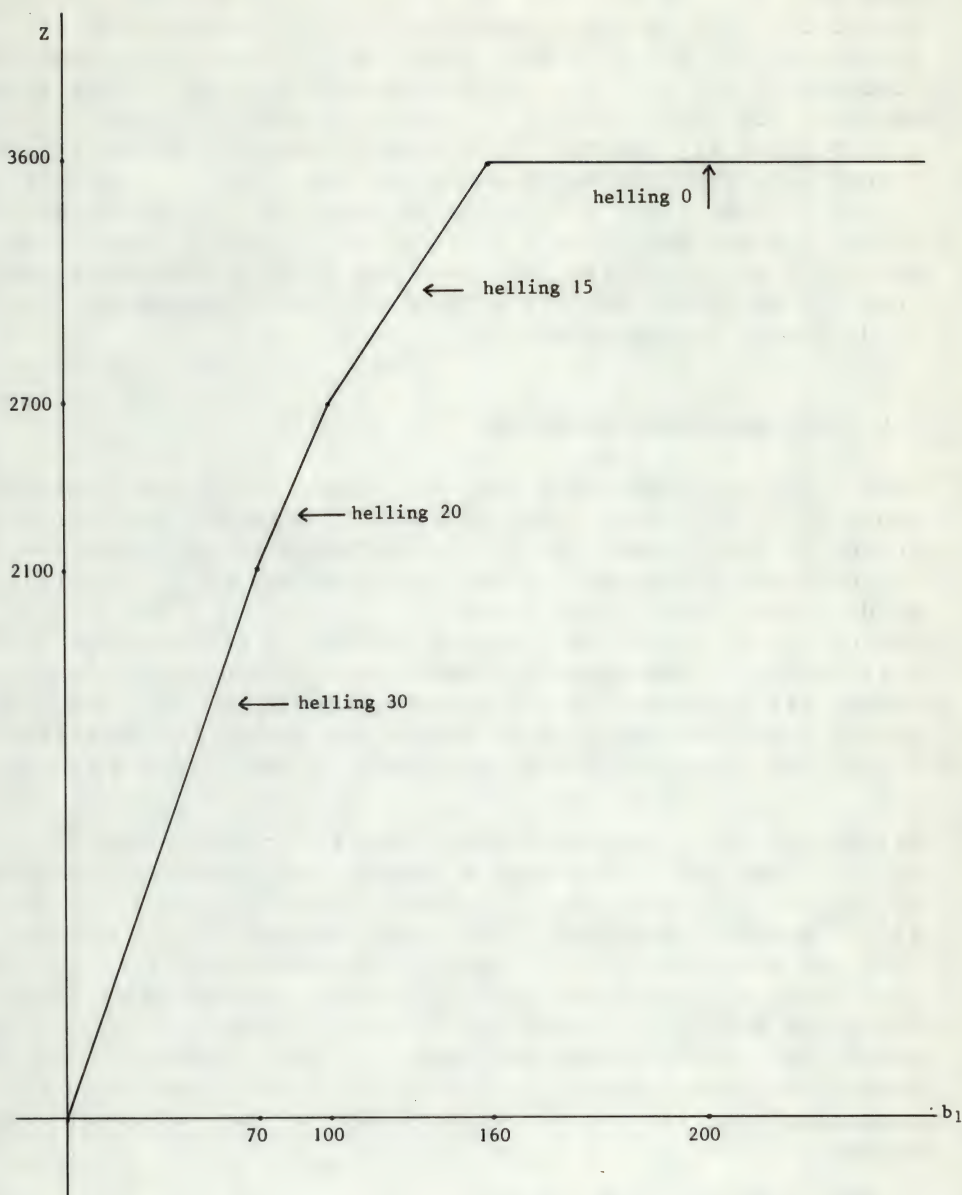


- figuur 3.2. Parametrisch programmeren -

b_1	x_1	x_2	z	Δz
0	0	0	0	--
1	0	1	30	30
2	0	2	60	30
⋮				
69	0	69	2070	
70	0	70	2100	30
71	2/3	69 2/3	2120	20
72	4/3	69 1/3	2140	20
⋮				
99	19 1/3	60 1/3	2680	
100	20	60	2700	20
101	21	59	2715	15
102	22	58	2730	15
⋮				
159	79	1	3585	
160	80	0	3600	15
161	80	0	3600	0
200	80	0	3600	0

- tabel 3.1. z en Δz als functie van b_1 -

In figuur 3.2. hebben wij ook getekend de lijn $2x_1 + x_2 = 20$ en de lijn $45x_1 + 30x_2 = 1350$. Gemakkelijk is nu in te zien dat indien $b_1 = 20$, P_1 het optimum is. Evenzo zal, als $b_1 = 1$, het optimum zijn het snijpunt van de lijn $2x_1 + x_2 = 1$ met de y-as. Dit snijpunt is $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ en de waarde van $z = 45x_1 + 30x_2$ bedraagt in dat punt 30. Indien $b_1 = 70$ wordt punt D het optimale punt. Geeft men b_1 een nog grotere waarde, bijvoorbeeld 71, dan verschuift het optimale punt niet langer langs de x_2-as, maar



- figuur 3.3. z als functie van b_1 -

langs de restrictie van machine 2. Indien $b_1 = 71$ is het snijpunt van $2x_1 + x_2 = 71$ en $x_1 + 2x_2 = 140$ het optimum. De coördinaten van dit snijpunt zijn
$x_1 = 2/3$, $x_2 = 69\ 2/3$ en $z = 45*2/3 + 30 * 69\ 2/3 = 2120$.
Indien $b_1 = 100$ is C het optimale punt. Bij waarden van $b_1 > 100$ verschuift het optimale punt langs de restrictie van de arbeid. Indien $b_1 = 160$ is F het optimale punt. Geeft men b_1 nog grotere waarden, dan blijft toch F het optimale punt. De relatie tussen z en b_1, die wij in tabel 3.1. hebben gevonden, hebben wij in figuur 3.3. grafisch weergegeven. In figuur 3.3. is de helling van de grafiek niets anders dan de marginale toeneming van z als gevolg van een marginale toeneming van b_1. Dit is de schaduwprijs van de restrictie. Wij zien dat voor $b_1 = 120$ deze schaduwprijs gelijk is aan 15, hetgeen wij ook in paragraaf 3.1. reeds hebben geconstateerd.

3.3. GEVOELIGHEIDSANALYSE

Vele van de gegevens, die voor een lineair programmeringsmodel nodig zijn, zijn niet nauwkeurig van te voren bekend maar berusten op schattingen. Zo zal bijvoorbeeld in ons voorbeeld de verkoopprijs van produkt A een schatting van de verkoopprijs in de planperiode kunnen zijn.
Daarom is het zinvol de vraag te stellen in hoeverre het optimale produktieprogramma verandert, als de inputgegevens veranderen. Wij beperken ons tot veranderingen in de coëfficiënten van de doelstellingsfunctie, hoewel men natuurlijk dezelfde vraag voor veranderingen in de elementen van matrix A kan stellen.

Wij vragen ons dus af of het optimale programma verandert indien c_1 in plaats van 45 een andere waarde, zeg 44 krijgt. Beschouwen wij figuur 2.3. dan zien wij, dat daardoor de lijnen die de richting van de doelstellingsfunctie aangeven draaien en wel (bij een afneming van c_1) tegen de wijzers van de klok in. Bij een kleine wijziging van c_1 blijft punt B het optimale punt. Dat wordt anders indien de waarde van c_1 zodanig wordt verkleind, dan lijnen, die de richting van de doelstellingsfunctie aangeven evenwijdig gaan lopen met lijnstuk BC. In dat geval zijn alle punten op het lijnstuk BC optimaal. Dit is dus het geval als de lijnen

$$c_1x_1 + 30x_2 = \text{constant}$$

evenwijdig zijn met de lijn $x_1 + x_2 = 80$. Beide lijnen zijn evenwijdig dan en slechts dan indien

$$c_1 : 1 = 30 : 1$$

ofwel dan en slechts dan als $c_1 = 30$. Indien c_1 groter is dan 45 kunnen wij een soortgelijke redenering toepassen: het gehele lijnstuk BA is optimaal, dan en slechts dan als de lijnen

$$c_1x_1 + 30x_2 = \text{constant}$$

evenwijdig zijn met de lijn $2x_1 + x_2 = 120$.
Dit is zo d.e.s.d. als $c_1 : 2 = 30 : 1$ ofwel $c_1 = 60$.
Wij concluderen dus dat het optimale programma ongevoelig is voor wijzigingen van c_1, zolang deze liggen binnen het interval $30 < c_1 < 60$.
Bovenstaande analyse noemt men een *gevoeligheidsanalyse*.

3.4. VRAAGSTUKKEN

3-1. De verkoopafdeling van de in vraagstuk 2-1 bedoelde onderneming deelt mee maximaal 400 stuks van produkt a te kunnen verkopen.

a. Voeg deze verkooprestrictie als derde restrictie toe aan het in vraagstuk 3-1 geformuleerde model. Wat is nu de optimale oplossing? Hoe groot is nu de waarde van de doelstellingsfunctie in de optimale oplossing?
b. Hoe groot is de schaduwprijs van de verkooprestrictie?
c. Indien b_3 (dat is de parameter in het rechterlid van de verkooprestrictie) de waarden 0, 1, 2, ..., 1000 aanneemt, welke waarden krijgt de doelstellingsfunctie dan? Maak een grafiek, waarin z (dat is de waarde van de doelstellingsfunctie) wordt geschetst als functie van b_3.

3-2. Gegeven is het volgende LP-model:
Maximeer

$$2x_1 + x_2$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 \leq 8 \qquad \text{I}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7 \qquad \text{II}$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \qquad \text{III}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ ,$$

a. Los het probleem op met behulp van de grafische oplossingsmethode.

b. Hoe groot is de schaduwprijs van restrictie II?
c. Welke waarden krijgt de doelstellingsfunctie als b_2 (dat is de parameter in het rechterlid van restrictie II) de waarden 0, 1, 2, ..., 20 aanneemt? Maak een grafiek, waarin z (dat is de waarde van de doelstellingsfunctie) wordt getekend als functie van b_2.

3-3. Wij bekijken opnieuw het LP-model van vraagstuk 2-1 (wij laten nu dus de in vraagstuk 3-1 geïntroduceerde verkooprestrictie buiten beschouwing).
Verandert het optimale produktiepakket als de dekkingsbijdrage van produkt A verandert van ƒ 200,- per stuk in ƒ 160,- per stuk? Verandert de waarde van de doelstellingsfunctie door deze wijziging?
Dezelfde vragen voor een verandering van de dekkingsbijdrage van produkt A in ƒ 120,- per stuk.
Binnen welke grenzen kan c_1 (dat is de dekkingsbijdrage per stuk van produkt A) veranderen zonder dat de samenstelling van het optimale produktiepakket verandert?

3-4. Gegeven is het volgende LP-probleem:
Maximeer

$$2x_1 + x_2$$

onder de voorwaarden

$$\begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 \leqq 100 & & \text{I} \\ x_1 + x_2 \leqq 70 & & \text{II} \\ x_1 \leqq 25 & & \text{III} \\ x_1, x_2 \geqq 0 & & \end{array}$$

a. Los dit probleem op met behulp van de grafische oplossingsmethode.
b. Hoe groot is de schaduwprijs van restrictie III?
c. Welke waarden krijgt x (dat is de waarde van de doelstellingsfunctie) als b_3 (dat is de parameter in het rechterlid van restrictie III) de waarden 0,1,2,...,200 aanneemt?
Maak een grafiek, waarin z wordt getekend als functie van b_3.

3-5. Beschouw nogmaals vraagstuk 2-7. De bouwonderneming wenst in het onderhavige project niet meer dan ƒ 40 mln te investeren, omdat de financieringsmiddelen nu eenmaal beperkt zijn. Stel dat de bouwonderneming onbeperkt geld kan lenen tegen een interestvergoeding van 5% gedurende de looptijd van het project (als de onderneming ƒ 1000,-- leent, dan moet men daarover dus een interest ten bedrage van ƒ 50,-- betalen).

a. Is het voor de bouwonderneming aantrekkelijk tegen deze interestvoet geld te lenen? Met welk bedrag neemt de winst toe (c.q. af) als men ƒ 1000,- leent?

b. Als het aantrekkelijk is om geld te lenen, welk bedrag moet de bouwonderneming dan lenen als men de winst wil maximeren?

3-6. Wij bekijken opnieuw het vraagstuk van klokkenfabriek Frisia B.V. Verandert het optimale produktiepakket als de brutomarge voor de Friese staartklok verandert van ƒ 160,- per klok in ƒ 180,- per klok? Verandert de waarde van de doelstellingsfunctie door deze verandering? Zo ja, kunt u dan aangeven met welk bedrag de waarde van de doelstellingsfunctie verandert?
Binnen welke grenzen kan c_1 (dat is de coëfficiënt van Friese staartklokken in de doelstellingsfunctie) variëren, zonder dat de samenstelling van het optimale produktiepakket verandert?

4. DE SIMPLEX-METHODE

4.1. INLEIDING

Het is duidelijk, dat de grafische oplossingsmethode alleen kan worden toegepast als het aantal variabelen twee bedraagt. Is het aantal variabelen groter, dan moet men een andere methode toepassen.
Aangezien het optimum altijd een hoekpunt van het area of feasible solutions is, zou men voor een probleem met n variabelen en m restricties alle snijpunten van de (m+n) hypervlakken (m hypervlakken voor de m restricties, n hypervlakken voor de additionele restricties $x_i \geq 0$), kunnen uitrekenen. In totaal verkrijgt men dan $\binom{m+n}{n}$ snijpunten. Een gedeelte daarvan correspondeert niet met een feasible solution. Men zou dan vervolgens door substitutie van de coördinaten van deze hoekpunten in de restricties moeten nagaan welke hoekpunten overeenkomen met feasible solutions. Tenslotte zou men de coördinaten van de hoekpunten, die overeenkomen met feasible solutions moeten substitueren in de doelstellingsfunctie. Het hoekpunt waarvan de coördinaten de hoogste waarde van de doelstellingsfunctie geeft is dan het optimale punt.

Bovenstaande methode is zeer omslachtig en geeft als n en m groot zijn aanleiding tot zo veel rekenwerk, dat de meest moderne computers duizenden jaren nodig zouden hebben voor het oplossen van één probleem. Daarom is behoefte aan een andere methode. Deze methode - de simplexmethode - is reeds in 1947 door G.B. Dantzig ontwikkeld.

4.2. EEN NUMERIEK VOORBEELD

Wij laten eerst aan de hand van een numeriek voorbeeld stap voor stap zien hoe de simplexmethode werkt. Wij kiezen daarvoor het probleem:

maximeer

$$45x_1 + 30x_2$$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 120 \\ x_1 + 2x_2 &\le 140 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

De eerste stap is, dat wij dit probleem herschrijven zō, dat alle restricties de gedaante van gelijkheden in plaats van ongelijkheden krijgen. Wij doen dit door aan iedere ≤ - restrictie één extra variabele toe te voegen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 120 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 140 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 80 \end{aligned}$$

Aan de variabelen x_3, x_4 en x_5 stellen wij eveneens de eis, dat zij niet negatief kunnen zijn. Daarmee kunnen wij de ongelijkheden vervangen door gelijkheden. De variabelen x_3, x_4 en x_5 noemt men spelingsvariabelen (slack variables). Men kan x_3 interpreteren als het aantal ongebruikte capaciteitseenheden van machine 1. Aan x_4 en x_5 kan men een analoge interpretatie geven. Ook de doelstellingsfunctie schrijven wij als een gelijkheid, namelijk als

$$z - 45x_1 - 30x_2 = 0.$$

Wij hebben nu ons probleem herschreven als:

$$\begin{aligned} z - 45x_1 - 30x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 120 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 140 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 80 \end{aligned}$$

Dit is een stelsel van 4 vergelijkingen met 6 onbekenden.
Dit stelsel is onbepaald, dat wil zeggen het heeft een oneindig groot aantal oplossingen. Eén oplossing daarvan is zeer gemakkelijk te vinden.
Door te stellen $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ is het stelsel wel bepaald.
Wij vinden dan $z = 0$, $x_3 = 120$, $x_4 = 140$, $x_5 = 80$.

Wij noemen een dergelijke oplossing van een stelsel van (m+1) vergelijkingen met (m+n+1) variabelen, die men vindt door willekeurig n variabelen gelijk aan nul te stellen een *basisoplossing* (basic solution).

Wij herschrijven nu het stelsel van vergelijkingen in het onderstaande tableau

basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	-45	-30	0	0	0	0
x_3	0	(2)	1	1	0	0	120
x_4	0	1	2	0	1	0	140
x_5	0	1	1	0	0	1	80

- tabel 4.1. Het eerste simplex-tableau -

Dit tableau moet men lezen net als het hierboven gegeven stelse- van vergelijkingen. De eerste regel moet men dus lezen als:

$$z - 45x_1 - 30x_2 = 0$$

de tweede regel als:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 120 \quad \text{enz.}$$

In de eerste kolom van het eerste simplex-tableau hebben wij bovendien de zgn. *basisvariabelen* aangegeven. Wij zeggen, dat z, x_3, x_4 en x_5 de bij dit tableau behorende basisvariabelen zijn. Stelt men $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ dan verkrijgt men als basisoplossing $z = 0$, $x_3 = 120$, $x_4 = 140$ en $x_5 = 80$. Deze waarden kan men aflezen in de meest rechtse kolom van het simplextableau. Deze kolom duiden wij aan met de letters RL (rechterlid) of RHS (right-hand-side).
Bekijkt men de kolommen van het simplex-tableau afzonderlijk, dan bevatten de kolommen van z, x_3, x_4 en x_5 alle slechts één cijfer ongelijk nul. Dit cijfer is dan een 1, terwijl de aldus verkregen vier cijfers 1 op verschillende regels staan. Omdat de kolommen van de basisvariabelen alleen nullen en enen bevatten kan men de waarden van de basisvariabelen direct aflezen in het rechterlid.

De tweede stap is nu, dat men een andere basisoplossing zoekt, die voldoet aan twee eisen:

1e de nieuwe basisoplossing moet eveneens feasible zijn
2e de nieuwe basisoplossing moet leiden tot een waarde van z die niet lager is dan de waarde van z in de bestaande basisoplossing.

Wij bekijken daartoe eerst de eerste regel van het simplextableau $z - 45x_1 - 30x_2 = 0$.
In de bij dit tableau behorende oplossing is $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$.
Een oplossing waarbij bijvoorbeeld $x_1 > 0$ en $x_2 = 0$ is, leidt dus tot een grotere waarde van z dan de huidige waarde $z = 0$.
Wij proberen daarom een basisoplossing te vinden met een waarde van $x_1 > 0$. In plaats van $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ moet men nu naast $x_2 = 0$ nog een andere variabele gelijk aan nul stellen. Indien wij ons niet willen beperken tot basic *feasible* solutions zouden wij willekeurig één bepaalde variabele gelijk aan nul kunnen stellen. Wij wensen ons echter uitdrukkelijk te beperken tot basic *feasible* solutions. Wij berekenen daarom de waarden van de drie breuken:

$$\frac{120}{2}, \quad \frac{140}{1} \quad \text{en} \quad \frac{80}{1}$$

De kleinste van deze drie is $\frac{120}{2}$. Dit betekent, dat als wij de waarde van x_1 zoveel mogelijk willen vergroten de eerste restrictie de bottleneck gaat vormen, niet de restricties 2 of 3. Dit houdt tevens in dat dan x_3, de spelingsvariabele van restrictie 1, nul wordt. Wij voeren nu op het simplextableau van tabel 4.1. een aantal bewerkingen uit. Na uitvoering van deze bewerkingen is x_1 een basisvariabele geworden, terwijl x_3 niet langer een basisvariabele zal zijn.
Deze bewerkingen zijn:
1e wij delen de tweede rij door 2, dit is niets anders dan de vergelijking

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 120$$

schrijven als

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = 60$$

Het simplextableau ziet er nu uit als aangegeven in tabel 4.2.
2e Wij vermenigvuldigen nu de tweede rij met 45 en tellen deze rij bij de eerste op. Dit is niets anders dan de tweede vergelijking van het stelsel met 45 te vermenigvuldigen.en optellen bij de eerste vergelijking.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
1	-45	-30	0	0	0	0
0	1	½	½	0	0	60
0	1	2	0	1	0	140
0	1	1	0	0	1	80

- tabel 4.2. Het tweede simplex-tableau in statu nascendi -

Het tableau wordt dan zoals aangegeven in tabel 4.3.:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
1	0	-7½	22½	0	0	2700
0	1	½	½	0	0	60
0	1	2	0	1	0	140
0	1	1	0	0	1	80

- tabel 4.3. Het tweede simplex-tableau nog steeds in statu nascendi -

3e Wij vermenigvuldigen nu de tweede rij met -1 en tellen die op bij de derde rij. Vervolgens vermenigvuldigen wij de tweede rij met -1 en tellen die op bij de vierde rij. Wij krijgen dan het tableau van tabel 4.4.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	-7½	22½	0	0	2700
x_1	0	1	½	½	0	0	60
x_4	0	0	3/2	-½	1	0	80
x_5	0	0	(½)	-½	0	1	20

- tabel 4.4. Het tweede simplex-tableau -

Wij hebben nu een nieuwe basic feasible solution gevonden, n.l.:

$$z = 2700, \quad x_1 = 60, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 80, \quad x_5 = 20$$

Door het uitvoeren van bovengenoemde stappen hebben wij een stelsel van vier vergelijkingen met zes onbekenden verkregen,

dat equivalent is met het stelsel weergegeven in het eerste tableau. In het tweede simplextableau is x_1 een basisvariabele. De bij x_1 behorende kolom luidt:

0
1
0
0

Wij hebben van het oorspronkelijke element in de tweede rij van de kolom behorende bij x_1 (het getal 2) een 1 gemaakt door te delen door 2. Vervolgens hebben wij de rest van de kolom behorende bij x_1 "schoongeveegd", d.w.z. wij hebben zodanige bewerkingen toegepast, dat in de rest van de kolom behorende bij x_1 nu nog uitsluitend nullen staan. Het element in de tweede rij in de kolom behorende bij x_1 in het eerste tableau noemt men het *pivot-element*. Wij hebben in tabel 4.1. het pivot-element omcirkeld.

De derde stap is nu, dat wij ons afvragen of wij de optimale oplossing reeds hebben gevonden. De vraag luidt dus: is de basic feasible solution van het tweede tableau (tabel 4.4.) de optimale oplossing of is er een andere basic feasible solution met een waarde van $z \geq 2700$? Wij beschouwen hiertoe de eerste rij:

$$z - 7\tfrac{1}{2}x_2 + 22\tfrac{1}{2}x_3 = 2700$$

ofwel

$$z = 2700 + 7\tfrac{1}{2}x_2 - 22\tfrac{1}{2}x_3$$

In de basisoplossing van het tweede tableau is $x_2 = 0$ en $x_3 = 0$. Indien wij nu x_2 een waarde > 0 geven neemt de waarde van z toe en wel met $7\frac{1}{2}$ voor iedere eenheid x_2. In het eerste tableau luidde de eerste rij $z = 45x_1 + 30x_2$. De bijdrage van x_2 aan de doelstellingsfunctie was toen 30. In het tweede tableau is de bijdrage van x_2 aan de doelstellingsfunctie nog slechts $7\frac{1}{2}$. Dit komt doordat men om een éénheid x_2 te kunnen produceren $\frac{1}{2}$ eenheid x_1 moet opgeven. Daardoor neemt de waarde van de doelstellingsfunctie niet toe met 30 maar slechts met $30 - \frac{1}{2} * 45 = 7\frac{1}{2}$. (Men herleze nu ook de intuïtieve benadering van paragraaf 2.3.).
Dat men om 1 eenheid x_2 te kunnen produceren $\frac{1}{2}$ eenheid x_1 moet opgeven leest men uit de tweede rij:

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = 60$$

In de basisoplossing is $x_1 = 60$, $x_2 = 0$ en $x_3 = 0$. Wil men

$x_2 = 1$ maken, dan moet men de waarde van x_1 wel verkleinen en wel tot 59½, aangezien x_3 niet negatief mag worden. Het element van kolom x_2 in de rij corresponderend met basisvariabele x_1 geeft dus aan hoeveel eenheden x_1 men moet opgeven om 1 eenheid van x_2 te kunnen produceren.
Evenzo geven de elementen van x_2 in de rijen corresponderende met de basisvariabelen x_4 en x_5 aan hoeveel eenheden van x_4 respectievelijk x_5 men moet opgeven om één eenheid van x_2 te kunnen produceren:

$$3/2x_2 - 1/2x_3 + x_4 = 80$$

In de basisoplossing behorende bij het tweede tableau is $x_4 = 80$. Wil men $x_2 = 1$ maken, dan zal ofwel $x_4 < 80$ en $x_3 = 0$ ofwel $x_4 = 80$ en $x_3 > 0$ moeten zijn. De laatste mogelijkheid ($x_4 = 80$ en $x_3 > 0$) is niet aantrekkelijk: men zou dan namelijk via de vergelijking van de tweede rij ook x_1 verder moeten laten dalen dan hierboven reeds besproken; dit zou inhouden dat wij er niet meer op moeten rekenen dat de waarde van de doelstellingsfunctie toeneemt met $30 - \frac{1}{2} * 45 = 7\frac{1}{2}$ als x_2 toeneemt met één eenheid. Wij houden dus $x_3 = 0$ en zien dat wij dan om x_2 met één eenheid te kunnen laten toenemen x_4 moeten laten dalen met 3/2. Men kan dit ook inzien als volgt: ruilt men één eenheid x_2 voor ½ eenheid x_1, dan is daarvoor van machine 2 extra benodigd $2 - \frac{1}{2} = 3/2$ uur. De waarde van de spelingsvariabele x_4 zal dus afnemen met 3/2 als wij de waarde van x_2 met 1 laten toenemen. Dit resultaat hadden wij ook in paragraaf 2.3. reeds gevonden.
Hoever kunnen wij nu x_2 maximaal laten toenemen? In plaats van 1 eenheid x_2 moeten wij opofferen ½ eenheid x_1. Wij hebben in onze basisoplossing 60 eenheden x_1. Wij kunnen dus maximaal 60 eenheden x_1 opofferen. Het aantal eenheden x_2 dat wij maximaal in de oplossing kunnen introduceren is dus - voor wat betreft de restrictie weergegeven in de tweede rij -

$$\frac{60}{\frac{1}{2}} = 120$$

Voor wat betreft de derde rij geldt het volgende: wil men x_2 met 1 laten toenemen, dan zal x_4 moeten afnemen met 3/2. Men heeft in de basisoplossing thans $x_4 = 80$ (d.w.z. er zijn nog 80 uur onbezet op machine 2). Men kan dus wat dat betreft x_2 maximaal laten toenemen tot

$$\frac{80}{3/2} = 53\ 1/3$$

Voor wat betreft de vierde rij vindt men op analoge wijze dat

men x_2 maximaal kan laten toenemen tot

$$\frac{20}{\frac{1}{2}} = 40.$$

Deze drie voorwaarden tesamen nemend concluderen wij dat wij x_2 maximaal kunnen laten toenemen tot 40. De rekenregel is hier dus weer: bepaal de kleinste van de drie breuken

$\frac{60}{\frac{1}{2}}$, $\frac{80}{3/2}$ en $\frac{20}{\frac{1}{2}}$. De kleinste van deze drie breuken is $\frac{20}{\frac{1}{2}}$. Dit komt overeen met de rij van variabele x_5. Variabele x_5 gaat nu uit de basis om plaats te maken voor variabele x_2.

Wij transformeren nu het tableau van tabel 4.4. met als pivot-element het element in de rij overeenkomend met x_5 en in de kolom overeenkomend met x_2. Dit element hebben wij in tabel 4.4. weer omcirkeld. De transformatie bestaat uit de volgende stappen:

1. vermenigvuldig de vierde rij met 2
2. tel de met $7\frac{1}{2}$ vermenigvuldigde nieuwe vierde rij op bij de eerste rij
3. tel de met $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigde nieuwe vierde rij op bij de tweede rij
4. tel de met $-3/2$ vermenigvuldigde nieuwe vierde rij op bij de derde rij.

Wij krijgen dan het tableau van tabel 4.5.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	15	0	15	3000
x_1	0	1	0	1	0	-1	40
x_4	0	0	0	1	1	-3	20
x_2	0	0	1	-1	0	2	40

- tabel 4.5. Het derde simplex-tableau -

Wij vragen ons thans weer af of wij de nu gevonden basisoplossing $z = 3000$, $x_1 = 40$, $x_2 = 40$, $x_3 = 0$, $x_4 = 20$, $x_5 = 0$ nog kunnen verbeteren. Wij beschouwen daartoe weer de eerste rij:

$$z + 15x_3 + 15x_5 = 3000$$

ofwel

$$z = 3000 - 15x_3 - 15x_5$$

In de huidige basisoplossing is $x_3 = 0$ en $x_5 = 0$. Zouden wij ofwel x_3 ofwel x_5 een waarde $\neq 0$ geven, dan neemt de waarde van z dus niet toe maar àf. Het is nu niet meer mogelijk één van de niet-basis variabelen (x_3 of x_5) in de basis te introduceren teneinde daardoor z te doen toenemen. Dit betekent dat $z = 3000$, $x_1 = 40$, $x_2 = 40$, $x_3 = 0$, $x_4 = 20$ en $x_5 = 0$ de optimale oplossing is [7].

De gehele Simplex-procedure kan met het opschrijven van de drie tableau's worden samengevat. Zie tabel 4.6.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
1	z	1	-45	-30	0	0	0	0
	x_3	0	(2)	1	1	0	0	120
	x_4	0	1	2	0	1	0	140
	x_5	0	1	1	0	0	1	80
2	z	1	0	$-7\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	0	0	2700
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	60
	x_4	0	0	3/2	$-\frac{1}{2}$	1	0	80
	x_5	0	0	($\frac{1}{2}$)	$-\frac{1}{2}$	0	1	20
3	z	1	0	0	15	0	15	3000
	x_1	0	1	0	1	0	-1	40
	x_4	0	0	0	1	1	-3	20
	x_2	0	0	1	-1	0	2	40

- tabel 4.6. Samenvatting simplex tableaus -

4.3. SAMENVATTING VAN DE SIMPLEX-METHODE

In de voorgaande paragraaf hebben wij de simplex-methode aan de hand van een voorbeeld toegelicht. Een lineair programmeringsmodel, dat uitsluitend $\leq$ -restricties bevat en waarvan de doelstellingsfunctie gemaximaliseerd moet worden, kan men als volgt schrijven:
Maximeer

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

onder de voorwaarden

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\text{-----------------------------} &\leq \text{--} \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

Wij veronderstellen voorlopig, dat de getallen b_1, b_2, ..., b_m alle niet negatief zijn. De simplex-methode kan dan als volgt worden samengevat:

Stap 1: Voeg aan alle restricties een spelingsvariabele toe en schrijf de doelstellingsfunctie als

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots\ldots - c_nx_n = 0$$

Schrijf nu het eerste simplextableau op. In dit tableau is $(z, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots, x_{n+m})$ de basisoplossing $(x_{n+1}, \ldots\ldots, x_{n+m}$ zijn de spelingsvariabelen).

Stap 2: Optimaliteitstest. Wij onderzoeken de optimaliteit van de basisoplossing door te kijken naar de elementen in de z-rij. Zijn deze alle ≥ 0, dan is de basisoplossing behorende bij dit tableau de optimale oplossing. Indien één of meer elementen in de z-rij < 0 zijn, gaan wij naar stap 3.

Stap 3: Selectie van de variabele, die wij in de basis willen opnemen. Wij kiezen daarvoor die variabele waarvan het element in de z-rij het kleinst is [8].

Stap 4: Selectie van de variabele, die wij uit de basis willen verwijderen. Wij bekijken daartoe de elementen in de kolom van de variabele, die wij in de basis willen opnemen. De elementen in deze kolom die > 0 zijn, delen wij op de overeenkomstige elementen in het rechterlid. Van de aldus gevonden breuken selecteren wij de kleinste. Het getal dat de noemer vormt van deze kleinste breuk is nu het pivot-element. De rij waarin het pivot-element voorkomt geeft de variabele aan die wij uit de basis gaan verwijderen.

Stap 5: Veeg met het pivot-element de kolom van de variabele, die wij in de basis willen opnemen, schoon. Keer nu terug tot stap 2.

Wij herhalen de stappen 2, 3, 4 en 5 totdat wij bij stap 2 concluderen, dat wij de optimale oplossing hebben gevonden.

Een basisoplossing, waarvan de waarden van de basisvariabelen alle > 0 zijn, noemt men een *niet-gedegenereerde oplossing*.

Een basisoplossing, waarvan de waarden van één of meer basisvariabelen = 0 zijn noemt men een *gedegenereerde oplossing*. Indien geen gedegenereerde oplossingen voorkomen, leidt de simplexmethode in een eindig aantal stappen naar de optimale oplossing. Indien wel gedegenereerde oplossingen voorkomen is het mogelijk dat men na het uitvoeren van een bepaald aantal iteraties terecht komt bij een basisoplossing, die men al eerder gevonden had. Men zegt dan, dat er sprake is van cycling. Er zijn tot dusverre geen gevallen bekend, waarin in praktijkproblemen cycling optrad. Overigens kan men door het aanbrengen van enkele simpele wijzigingen in de simplex-methode ervoor zorgen, dat men ook indien gedegenereerde oplossingen voorkomen de optimale oplossing in een eindig aantal stappen vindt.

4.4. INTERPRETATIE VAN DE SIMPLEX-TABLEAUS

Bij de bespreking van de simplex-methode in paragraaf 4.2. zijn wij reeds uitgebreid ingegaan op de betekenis van de elementen in de simplextableaus. Wij willen het daar besprokene thans kort samenvatten en beschouwen daartoe tabel 4.6.
Kijken wij naar het tweede tableau in tabel 4.6. dan vinden wij:
- in het rechterlid de waarden van de basisvariabelen; de oplossing behorende bij tableau 2 is dus: $z = 2700$, $x_1 = 60$, $x_4 = 80$, $x_5 = 20$;
- in de z-rij de reduced revenues (voor de echte variabelen) en de imputed costs (voor de spelingsvariabelen). De reduced revenue van produkt B bij deze oplossing is dus $7\frac{1}{2}$ (de reduced revenues hebben altijd een -teken in de z-rij). De imputed cost van machine 1 is bij deze oplossing $22\frac{1}{2}$ (slack variable x_3 hoort bij machine 1);
- in de kolommen van de niet-basisvariabelen, het aantal eenheden dat men van de basisvariabelen moet opofferen om één eenheid van de betreffende niet-basisvariabele in de oplossing te kunnen introduceren. Wil men bijvoorbeeld één eenheid x_3 in de oplossing introduceren (d.w.z. wil men bijvoorbeeld 1 uur machine 1 vrijhouden voor bijvoorbeeld onderhoudswerkzaamheden), dan moet men $\frac{1}{2}$ eenheid van produkt A opgeven en krijgt men tevens $\frac{1}{2}$ uur op machine 2 en $\frac{1}{2}$ uur arbeid vrij.

Het laatste simplex-tableau kan men volkomen analoog interpreteren. De reduced revenues van alle echte variabelen zijn nu gelijk aan nul. De imputed cost van restrictie 1 is gelijk aan 15 evenals de imputed cost van restrictie 3. De imputed cost van restrictie 1 is niets anders dan de schaduwprijs van restrictie 1. In paragraaf 3.1. concludeerden wij ook reeds, dat de schaduwprijs van restrictie 1 gelijk aan 15 was.

Het laatste simplex-tableau geeft dus behalve de optimale oplossing ook de schaduwprijzen van de restricties. De schaduwprijs van restrictie 2 is gelijk aan nul, die van restrictie 3 is gelijk aan 15.

4.5. VRAAGSTUKKEN

4-1. Gegeven is een onderneming, die in principe drie produkten (A, B en C) zou kunnen maken. Van deze drie produkten zijn de volgende gegevens bekend:

	A	B	C
Verkoopprijs	110	100	105
Grondstofkosten	60	70	45
Dekking I	50	30	60
Loonkosten	60	20	40
Dekking II	-10	10	20

Men wenst nu het produktiepakket te bepalen, dat leidt tot een zo hoog mogelijke winst. Daarbij zijn de volgende gegevens van belang:

- de onderneming heeft thans 250 man direct produktief personeel; uit sociale overwegingen wenst men de werkgelegenheid op dit niveau van 250 man te handhaven; uitbreiding of inkrimping van het aantal personeelsleden is dus niet mogelijk;
- er zijn 200 machines van type I; na aftrek van tijd nodig voor onderhoud zijn per dag beschikbaar 1400 uren voor machines van type I;
- er zijn 200 machines van type II; na aftrek van tijd nodig voor onderhoud zijn per dag beschikbaar 1500 uren voor machines van type II;
- per dag zijn beschikbaar 2000 direct produktieve manuren;
- het capaciteitsbeslag van de produkten is als volgt (uren per eenheid produkt):

	A	B	C
manuren	3	1	2
machines I	1	2	2
machines II	2	2	1

- de loonkosten bedragen ƒ 20,- per manuur ofwel ƒ 160,- per mandag;
- de kosten van salarissen van niet-direct produktief personeel, de afschrijvingen, de rente en de overige vaste kosten bedragen in totaal ƒ 10.000,- per dag.

Vragen:

a. Formuleer het LP-model en los het op.

b. Hoe groot is het verlies van de onderneming per dag? Hoe groot is de schaduwprijs van arbeid? Kan men de winstgevendheid van de onderneming verbeteren door 1 man extra in dienst te nemen of kan men, als men de winstgevendheid van de onderneming zou willen verbeteren, beter overwegen 1 man te ontslaan? Met welk bedrag neemt het verlies af bij deze beide potentiële maatregelen?

4-2. a. Los het probleem van vraagstuk 2-1 op met behulp van de simplex-methode (opmerking: de in vraagstuk 3-1 geïntroduceerde verkooprestrictie blijft buiten beschouwing).

b. Stel, dat een nieuw produkt C wordt ontwikkeld, waarvan de gegevens zijn: dekkingsbijdrage per eenheid ƒ 250,-, capaciteitsbeslag per eenheid produkt 4 uren van afdeling I en 2 uren van afdeling II. Hoe luidt nu het optimale produktiepakket? Beantwoord deze vraag door het probleem opnieuw - nu voor 3 produkten op te lossen.

c. Met welk bedrag neemt nu de behaalde dekking af, als men tenminste één eenheid van produkt B zou willen blijven produceren.

4-3. a. Los het probleem van klokkenfabriek Frisia B.V. op met behulp van de simplex-methode (zie vraagstuk 2-2).

b. Hoeveel uren van de houtafdeling zijn in het optimale programma niet benut?
Hoe groot is de schaduwprijs van arbeid in de spuiterij?

c. De stylist van Frisia B.V. ontwerpt een nieuw soort stoeltjesklok. Deze is technisch geheel gelijk aan de bestaande stoeltjesklok en vraagt precies evenveel arbeid als de bestaande stoeltjesklok in de spuiterij en in de montage. Qua houtbewerking is de stoeltjesklok nieuwe stijl echter aanzienlijk bewerkelijker: de nieuwe stoeltjesklok vraagt 2 uur arbeid van de houtafdeling. De brutomarge van de nieuwe klok bedraagt 240,- per klok.

Wordt deze nieuwe klok in het optimale produktieprogramma opgenomen? Beantwoord deze vraag zonder het probleem opnieuw (met 3 produkten) op te lossen (zie de opmerking bij de oplossing van vraagstuk 4-2).

d. Los het probleem van Frisia B.V. nu op voor 3 produkten met behulp van de simplex-methode.

4-4. a. Frisia B.V. heeft nu naast de 3 bestaande produkten ((friese staartklok, friese stoeltjesklok en friese stoeltjesklok nieuwe stijl) de mogelijkheid de originele uurwerken die Frisia B.V. zelf maakt, te verkopen aan andere fabrikanten van stijlklokken. In dat geval bedraagt de brutomarge ƒ 60,- per verkocht uurwerk.
Los het probleem van Frisia B.V. nu met 4 produkten op met behulp van de simplex-methode.

b. Wat is nu de schaduwprijs van arbeid in de spuiterij?

4-5. Gegeven is een boer, die in principe drie soorten gewassen kan verbouwen; deze gewassen worden aangeduid met de letters A, B en C. De boer bezit 60 hectare bebouwbare grond. Eén ha grond ingezaaid met gewas A levert 2 ton verkoopbaar produkt van gewas A op; voor de gewassen B en C is dit respectievelijk 1,8 en 1,6 ton. De verkoopprijzen bedragen (in guldens per ton):

A 800,-
B 475,-
C 750,-

De variabele kosten (zaaigoed, brandstof voor landbouwwerktuigen, etc.) bedragen ƒ 100,- per ha ingezaaid met gewas A, ƒ 55,- per ha ingezaaid met gewas B en ƒ 35,- per ha ingezaaid met gewas C.
Gedurende de maanden april tot en met september moet de boer 20 uur arbeid verrichten voor iedere hectare ingezaaid met gewas A, 10 uur arbeid voor iedere hectare ingezaaid met gewas B en 15 uur arbeid voor iedere hectare ingezaaid met gewas C.
De boer moet thans beslissen welke hoeveelheden hij van de drie gewassen in het komende jaar gaat verbouwen. Hij wenst in de maanden april tot en met september ten hoogste 1000 uur te werken en binnen die restrictie zijn bruto-winst te maximeren.

a. Formuleer bovenstaand probleem als een LP-probleem.
b. Los het probleem op met behulp van de simplex-methode.

4-6. Gegeven is een chemische fabriek: bij het produktieproces van deze fabriek komen twee afvalstoffen (aan te duiden met A en B) vrij. Deze afvalstoffen worden geloosd op het oppervlaktewater. Aan het lozen van deze afvalstoffen zijn tot dusverre geen kosten verbonden.
Het lozen van de afvalstoffen brengt een aanzienlijke verontreiniging van het oppervlaktewater teweeg. De engineering-afdeling heeft nu een ontwerp gemaakt voor een installatie, waarmee per dag 100 kg van stof A en 200 kg van stof B aan het afvalwater kan worden onttrokken; met behulp van deze installatie kunnen de stoffen A en B worden verwerkt tot halffabrikaten voor andere chemische industrieën. In principe kunnen vier soorten halffabrikaten worden geproduceerd (aan te duiden met 1, 2, 3 en 4). Enkele gegevens met betrekking tot deze halffabrikaten zijn:

	1	2	3	4
Verkoopprijs per eenheid	17,--	32,--	10,--	10,--
Grondstofkosten (excl. A en B)	7,--	12,--	4,--	5,--
Grondstofkosten A	p.m.	p.m.	p.m.	p.m.
Grondstofkosten B	p.m.	p.m.	p.m.	p.m.

Voor het produceren van één eenheid van de halffabrikaten 1, 2, 3 en 4 zijn nodig (kg):

	1	2	3	4
van stof A	2	2	0	1
van stof B	1	5	2	1

De vaste kosten van de nieuwe installatie worden geraamd op *ƒ* 300.000,-- per jaar ofwel (250 werkdagen per jaar) *ƒ* 1.200,-- per dag.

Als men besluit deze nieuwe installatie in gebruik te nemen, welke halffabrikaten moet men dan gaan produceren als men streeft naar een zo groot mogelijke winst (c.q. naar een zo klein mogelijk verlies)?

a. Formuleer dit probleem als een LP-probleem.
b. Los het probleem op met behulp van de Simplex-methode.
c. Is het - als men puur bedrijfseconomisch redeneert - aantrekkelijk om deze nieuwe installatie in gebruik te nemen?
d. Op de engineering-afdeling krijgt iemand nog een nieuw idee, namelijk om een halffabrikaat 5 te gaan produceren met behulp van de nieuwe installatie. De verkoopprijs van halffabrikaat 5 bedraagt *ƒ* 20,-- per eenheid, de grondstofkosten (excl. de grondstofkosten voor A en B) *ƒ* 13,-- per eenheid. Voor het produceren van één eenheid van halffabrikaat 5 is nodig 1 kg van stof A en 2 kg van stof B. Verandert door de aanwezigheid

van deze nieuwe mogelijkheid de samenstelling van het optimale produktiepakket, zoals berekend bij vraag b? Beantwoord deze vraag zonder het probleem opnieuw op te lossen (zie de opmerking bij de oplossing van vraagstuk 4-2).

4-7. De in vraagstuk 4-6 bedoelde chemische fabriek moet nu voor het lozen van de afvalstoffen een verontreinigingsheffing betalen. Deze heffing bedraagt ƒ 5,-- per kg voor stof A en ƒ 3,-- per kg voor stof B.

a. Formuleer nu opnieuw het probleem van de chemische fabriek als LP-probleem.
b. Los het probleem op met behulp van de Simplex-methode.

5. HET GEBRUIK VAN KUNSTMATIGE EN SURPLUS-VARIABELEN

5.1. INLEIDING

Tot dusverre hebben wij uitsluitend problemen beschouwd, die konden worden geformuleerd als:
maximeer

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

onder de voorwaarden:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

waarbij de getallen

$$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_m \geq 0$$

zijn.

Wij beschouwen nu het volgende probleem. Een veehouder heeft de beschikking over twee soorten veekoeken die wij A en B noemen. Een kilogram veekoeken van type A bevat 1 eenheid mineralen en 1 eenheid vitaminen. Een kilogram veekoeken van type B bevat 1 eenheid mineralen en 2 eenheden vitaminen. Een kilogram A kost ƒ 3,-, één kilogram B kost ƒ 5,-. De veehouder wenst voor zijn veestapel een menu te kiezen, dat per dag minstens 6 eenheden mineralen en 8 eenheden vitaminen bevat en dat tevens zo goedkoop mogelijk is. Wat is de optimale samenstelling van dit menu? Wij herkennen hierin onmiddellijk een lineair programmeringsprobleem, namelijk:
minimeer

$$3x_1 + 5x_2$$

onder de voorwaarden

$x_1 + x_2 \geq 6$ (mineralen)

$x_1 + 2x_2 \geq 8$ (vitaminen)

$x_1, x_2 \geq 0$

Indien wij nu proberen, dit probleem in bovengenoemde vorm te schrijven krijgen wij:
maximeer

$-3x_1 - 5x_2$

onder de voorwaarden:

$-x_1 - x_2 \leq -6$

$-x_1 - 2x_2 \leq -8$

$x_1, x_2 \geq 0$

Wij zijn er nu wel in geslaagd de ≥ -restricties om te zetten in ≤ -restricties, maar wij hebben nu negatieve getallen in het rechterlid. Dit houdt in dat wij, als wij de in paragraaf 4.3. beschreven oplossingsmethode toepassen, geconfronteerd worden met een simplex-tableau waarvan de basisoplossing niet feasible is (wij moeten dan immers een spelingsvariabele toevoegen aan iedere restrictie; de basisoplossing van het eerste tableau bestaat dan uit deze spelingsvariabelen; deze spelingsvariabelen hebben dan negatieve waarden, hetgeen overeenkomst met een infeasible solution).
In het algemeen kan men stellen, dat men iedere ≥ -restrictie kan transformeren in een ≤ -restrictie door te vermenigvuldigen met -1. Wij spreken nu af, dat wij bij het toepassen van de simplex-methode iedere restrictie steeds zo zullen formuleren, dat de constante in het rechterlid ≥ 0 is. Het bovengenoemde probleem (het zgn. dieetprobleem), formuleren wij dus als:
minimeer [9)]

$3x_1 + 5x_2$

onder de voorwaarden

$x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \geq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

5.2. DE INTRODUCTIE VAN SURPLUS-VARIABELEN

Wij kunnen naar analogie van de spelingsvariabelen nu in de restricties surplus-variabelen introduceren. Wij krijgen dan het volgende probleem:

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 8$$

waar x_3 voorstelt het aantal eenheden mineralen dat men méér geeft dan strikt nodig is. Aangezien wij weer eisen $x_3 \geq 0$ betekent $x_1 + x_2 - x_3 = 6$ hetzelfde als $x_1 + x_2 \geq 6$. Aan x_4 kan men een analoge interpretatie geven. Het eerste simplex-tableau wordt nu (zie tabel 5.1):

z	x_1	x_2	x_3	x_4	RL
1	-3	-5	0	0	0
0	1	1	-1	0	6
0	1	2	0	-1	8

- tabel 5.1. simplex-tableau voor dieetprobleem met surplus variabelen -

Het probleem is nu, dat dit tableau geen basis-oplossing bevat. De kolommen van x_3 en x_4 bevatten namelijk het element -1. Wil men dit getal -1 in de tweede rij transformeren in +1 door de hele rij te vermenigvuldigen met -1, dan wordt het rechterlid van +6 ook omgezet in -6. Op deze wijze vinden wij geen basic feasible solution, die als startoplossing voor de simplex-methode kan fungeren.

5.3. DE INTRODUCTIE VAN KUNSTMATIGE VARIABELEN

Om een basic feasible solution te vinden die als startoplossing voor de simplex-methode kan fungeren introduceren wij naast de surplus-variabelen tevens kunstmatige variabelen (artificial variables):

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 8$$

Deze kunstmatige variabelen worden alleen geïntroduceerd om een basic feasible solution te vinden. Wij willen de kunstmatige variabelen zo snel mogelijk elimineren en schrijven daarom de doelstellingsfunctie als:
minimeer

$$3x_1 + 5x_2 + Mx_5 + Mx_6$$

waar M een zeer groot positief getal is (zeg bijvoorbeeld M = 1.000.000).
Wij hebben dus nu het volgende probleem:

$$
\begin{aligned}
z - 3x_1 - 5x_2 \qquad\qquad - Mx_5 - Mx_6 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 6 \\
x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 &= 8
\end{aligned}
$$

Het eerste simplex-tableau wordt nu:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
1	-3	-5	0	0	-M	-M	0
0	1	1	-1	0	1	0	6
0	1	2	0	-1	0	1	8

- tabel 5.2. Simplex-tableau voor dieetproble
variabelen en kunstmatige variabelen -

Dit simplex-tableau bevat geen basic feasible solution. Door nu de met M vermenigvuldigde tweede rij en de met M vermenigvuldigde derde rij bij de eerste rij op te tellen krijgen wij:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	-3+2M	-5+3M	-M	-M	0	0	14M
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	6
x_6	0	1	2	0	-1	0	1	8

- tabel 5.3. Simplex-tableau voor dieetprobleem met basic feasible solution -

Een iets eenvoudiger notatie verkrijgen wij door het tableau van tabel 5.3. te schrijven als in tabel 5.4.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	-3	-5	0	0	0	0	0
	0	2	3	-1	-1	0	0	14
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	6
x_6	0	1	(2)	0	-1	0	1	8

- tabel 5.4. Simplex-tableau voor dieetprobleem met basic feasible solution -

Men moet het tableau van tabel 5.4. lezen net als dat van tabel 5.3. In de x_1-kolom in de z-rij staat dus $(-3 + 2M)$ en niet -3. De notatie van tabel 5.4. is gekozen omdat deze overzichtelijker is dan die van tabel 5.3.

5.4. TOEPASSING VAN DE SIMPLEX METHODE OP HET DIEET-PROBLEEM

Wij kunnen nu op het tableau van tabel 5.4. de simplex-methode toepassen. Wij bepalen eerst welke variabele wij in de basis willen opnemen. Wij wensen nu de doelstellingsfunctie te minimeren. Daarom kiezen wij die variabele, waarvan de coëfficiënt in de z-rij het grootst is. Voor x_1 is deze coëfficiënt $-3 + 2M$, voor x_2 is deze coëfficiënt $-5 + 3M$. Aangezien M zeer groot is, is $-5 + 3M > -3 + 2M$. Wij kiezen dus x_2 . Nu bepalen wij welke variabele wij uit de basis gaan verwijderen. Wij berekenen daartoe 6/1 en 8/2. De kleinste van deze twee breuken is 8/2. Daarmee hebben wij het pivot-element gevonden (wij hebben het pivot-element in tabel 5.4. omcirkeld). Variabele x_6 gaan wij uit de basis verwijderen. Wij gaan nu de kolom van x_2 schoonvegen met het pivot-element. Hiertoe delen wij eerst de x_6-rij door 2.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-5/2	0	5/2	20
	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	-3/2	2
x_5	0	($\frac{1}{2}$)	0	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4

- tabel 5.5. Tweede simplex-tableau voor dieetprobleem -

Zo vinden wij de laatste rij van het tweede tableau (zie tabel 5.5.). Om nu in de z-rij een 0 te krijgen moeten wij de met (5 - 3M) vermenigvuldigde laatste rij van tabel 5.5. optellen bij de z-rij van tabel 5.4. Wij vinden dan bijvoorbeeld voor de coefficiënt van x_1 in de z-rij:

$$-3 + 2M + (5 - 3M) * \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}M$$

en dit hebben wij opgeschreven in de z-rij van tabel 5.5. Veel eenvoudiger en volstrekt gelijkwaardig is de volgende methode: tel de met 5 vermenigvuldigde laatste rij op bij de eerste rij en tel dan de met -3M vermenigvuldigde laatste rij op bij de tweede rij. Aangezien wij in de notatie van tabel 5.4. de letter M weglaten, kunnen wij het tweede gedeelte van bovenstaande zin ook vervangen door: tel de met -3 vermenigvuldigde laatste rij op bij de tweede rij. Wij kunnen dus bij het schoonvegen van de kolommen de z-rij behandelen als twee afzonderlijke rijen die wij ieder voor zich schoonvegen. Men noemt de tweede rij ook wel de *hulpdoelstellingsfunctie*.
In tabel 5.5. komt nog één kunstmatige variabele (nl. x_5) voor in de basisoplossing. De waarde van de doelstellingsfunctie is 20 + 2M, dus een zéér groot getal. Pas als de waarde van de doelstellingsfunctie een getal is, waarin M niet meer voorkomt, hebben wij een feasible solution van het oorspronkelijke probleem zoals geformuleerd in paragraaf 5.1. Dit is het geval dan en slechts dan als in de rij van de hulpdoelstellingsfunctie in het rechterlid een 0 voorkomt.
Wij voeren nu nog een iteratie uit. Wij selecteren x_1 als variabele die wij in de basis willen introduceren (wij kiezen uit x_1 en x_4 met als coëfficiënten $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M$ en $-5/2 + \frac{1}{2}M$. Aangezien $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M > - 5/2 + \frac{1}{2}M$ kiezen wij x_1). De variabele x_5 verlaat nu de basis en na schoonvegen krijgen wij tabel 5.6.:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	0	0	-1	-2	1	2	22
	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	0	1	0	-2	1	2	-1	4
x_2	0	0	1	1	-1	-1	1	2

- tabel 5.6. Derde simplex-tableau voor dieetprobleem -

In dit tableau bestaat de gehele tweede rij uit nullen, behalve de elementen in de kolommen van de kunstmatige variabelen. Dit is geen toeval; laat men de kolommen van de kunstmatige variabelen buiten beschouwing, dan is immers in tabel 5.4. de tweede

rij al een lineaire combinatie van de derde en vierde rij (namelijk eenvoudig de som van de derde en vierde rij). Indien men erin slaagt in het rechterlid in de tweede rij een 0 te verkrijgen, zal dus de gehele tweede rij met uitzondering van de kolommen der kunstmatige variabelen uit nullen bestaan.
Wij hebben nu een basis-oplossing waarin de kunstmatige variabelen niet meer voorkomen. Wij passen nu de optimaliteitstest toe.

Aangezien wij thans de waarde van de doelstellingsfunctie minimeren, hebben wij de optimale oplossing gevonden indien géén der elementen in de z-rij > 0 is. Alle elementen in de z-rij met uitzondering van de elementen in de kolommen der kunstmatige variabelen zijn ≤ 0. Aangezien wij de kunstmatige variabelen buiten beschouwing laten, hebben wij in tabel 5.6. de optimale oplossing gevonden. Deze luidt: $z = 22$, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. en $x_4 = 0$.
Wij vatten de gehele procedure nog eens samen in tabel 5.7.
In tabel 5.7. hebben wij als tableau 0 het tableau van tabel 5.2. geschreven. Dit tableau bevat nog geen basisoplossing. Wel weten wij dat wij van de kunstmatige variabelen gemakkelijk basisvariabelen kunnen maken, hetgeen wij aangeven door deze variabelen tussen haakjes te plaatsen in de kolom "Basis".

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
	z	1	-3	-5	0	0	0	0	0
0		0	0	0	0	0	-1	-1	0
	(x_5)	0	1	1	-1	0	1	0	6
	(x_6)	0	1	2	0	-1	0	1	8
	z	1	-3	-5	0	0	0	0	0
1		0	2	3	-1	-1	0	0	14
	x_5	0	1	1	-1	0	1	0	6
	x_6	0	1	(2)	0	-1	0	1	8
	z	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-5/2	0	.	20
2		0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	.	2
	x_5	0	($\frac{1}{2}$)	0	-1	$\frac{1}{2}$	1	.	2
	x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	.	4

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
	z	1	0	0	-1	-2	.	.	22
3		0	0	0	0	0	.	.	0
	x_1	0	1	0	-2	1	.	.	4
	x_2	0	0	1	1	-1	.	.	2

- tabel 5.7. Simplex-procedure voor dieetprobleem -

5.5. VOORBEELD VAN EEN PROBLEEM MET EEN = -RESTRICTIE

Tot besluit van dit hoofdstuk geven wij nog een voorbeeld van een probleem met één ≤ -restrictie, één ≥ -restrictie en één = -restrictie, namelijk:
maximeer

$$10x_1 + 12x_2$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 = 25$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Wij schrijven dit probleem als:
maximeer

$$10x_1 + 12x_2 \quad -Mx_4 \quad -Mx_6$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 60$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 25$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 40$$

Aan de = -restrictie voegen wij dus uitsluitend een kunstmatige variabele toe, aan de ≥ -restrictie een surplus variabele èn een kunstmatige variabele. Wij willen de doelstellingsfunctie maximeren; om nu zo snel mogelijk de kunstmatige variabelen te elimineren hebben wij de kunstmatige variabelen in de doelstellingsfunctie de coëfficiënt -M gegeven, waarbij M een groot positief getal is. De oplossing van dit probleem is gegeven in tabel 5.8.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
	z	1	-10	-12	0	0	0	0	0
0		0	0	0	0	1	0	1	0
	x_3	0	2	4	1	0	0	0	60
	(x_4)	0	1	1	0	1	0	0	25
	(x_6)	0	2	2	0	0	-1	1	40
	z	1	-10	-12	0	0	0	0	0
1		0	-3	-3	0	0	1	0	-65
	x_3	0	2	(4)	1	0	0	0	60
	x_4	0	1	1	0	1	0	0	25
	x_6	0	2	2	0	0	-1	1	40
	z	1	-4	0	3	0	0	0	180
2		0	-3/2	0	3/4	0	1	0	-20
	x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	1/4	0	0	0	15
	x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	-1/4	1	0	0	10
	x_6	0	(1)	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	10
	z	1	0	0	1	0	-4	.	220
3		0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	.	-5
	x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	.	10
	x_4	0	0	0	0	1	($\frac{1}{2}$)	.	5
	x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	.	10
	z	1	0	0	1	.	0	.	260
4		0	0	0	0	.	0	.	0
	x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	.	0	.	5
	x_5	0	0	0	0	.	1	.	10
	x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	.	0	.	20

- tabel 5.8 -

5.6. VRAAGSTUKKEN

5-1. Een fabrikant van haarwaters wenst een nieuw soort haarwater aan het bestaande assortiment toe te voegen. Het produktieproces bestaat uit twee fasen. In de eerste fase worden een drietal standaardmengsels A, B en C gemaakt. In de tweede fase worden deze standaardmengsels in een bepaalde verhouding gemengd tot het eindprodukt.
De nieuwe soort haarwater moet zowel anti-roos als anti-haaruitval bestanddelen bevatten en wel tenminste 40 mg anti-roos bestanddeel en tenminste 60 mg anti-haaruitval bestanddeel per 100 ml.
De standaardmengsels bevatten per ml de volgende hoeveelheden anti-roos en anti-haaruitval bestanddelen:

	A	B	C
anti roos	1	1	2
anti haaruitval	1	0	1

De kostprijzen van de standaardmengsels A, B en C bedragen respectievelijk 30, 20 en 50 cent per 100 ml.

De fabrikant wenst het nieuwe type haarwater op zodanige wijze samen te stellen uit de drie standaardmengsels, dat de grondstofkosten van het nieuwe mengsel per 100 ml zo gering mogelijk zijn.

a. Formuleer dit probleem als een LP-probleem en los het op met behulp van de simplex-methode.

b. Als men als eis stelt, dat het nieuwe type haarwater tenminste 61 mg anti-haaruitval-middel moet bevatten, stijgen dan de grondstofkosten van het nieuwe produkt? Zo ja, met welk bedrag per 100 ml?

c. Los het probleem opnieuw op met behulp van de simplex-methode nu met een kostprijs voor standaardmengsel C van 10 cent in plaats van 50 cent per liter.

5-2. Een veehouder beschikt over 4 soorten veekoeken A, B, C en D. De vitaminegehalten van de 4 soorten veekoeken zijn vermeld in onderstaande tabel (eenheden per stuk):

Veekoek:		A	B	C	D
Vitamine	V1	4	0	2	1
	V2	2	1	1	0
	V3	0	0	2	2

Deze veehouder wenst een zodanig menu samen te stellen, dat iedere koe per dag tenminste 50 eenheden vitamine V1, 40 eenheden vitamine V2 en 10 eenheden vitamine V3 krijgt. De inkoopprijs van de veekoeken is:

A   ƒ 4,- per stuk

B   ƒ 1,- per stuk

C   ƒ 1,- per stuk

D   ƒ 4,- per stuk

De veehouder wenst tevens een zo goedkoop mogelijk menu samen te stellen.

Formuleer bovenstaand probleem als een LP-probleem en los het op met behulp van de simplex-methode.

5-3. Los het model van vraagstuk 2-7 op met behulp van de simplex-methode. (Aanwijzing: laat ter beperking van het rekenwerk de overbodige restricties weg.)

5-4. Los het probleem van vraagstuk 2-8 op met behulp van de simplex-methode.

5-5. Los het probleem van de oliemaatschappij van vraagstuk 2-9 op met behulp van de simplex-mehtode.

6. HET DUALE PROBLEEM

6.1. DE ZIENSWIJZE VAN EEN BUITENSTAANDER

Wij bekijken thans opnieuw het probleem van de optimale samenstelling van het produktiepakket uit paragraaf 2.2.: maximeer

$$45x_1 + 30x_2$$

onder de voorwaarden

$2x_1 + x_2 \leq 120$	Machine 1
$x_1 + 2x_2 \leq 140$	Machine 2
$x_1 + x_2 \leq 80$	Arbeid
$x_1, x_2 \geq 0$	

Wij beschouwen dit probleem nu echter vanuit het gezichtspunt van een buitenstaander, die overweegt alle produktiecapaciteiten waarover de onderneming beschikt te huren. Deze buitenstaander vraagt zich nu af welke huurprijzen hij zal moeten betalen. Hij streeft er enerzijds naar in totaal een zo klein mogelijke som te betalen voor het huren van alle produktiecapaciteiten, terwijl anderzijds de door hem geboden huurprijzen voor de ondernemer acceptabel moeten zijn. Stel deze buitenstaander is bereid u_1 gulden per uur te betalen voor machine 1, u_2 gulden per uur voor machine 2 en u_3 gulden per uur voor de arbeid. In totaal zal deze buitenstaander voor alle produktiecapaciteiten tesamen dus moeten betalen:

$$120u_1 + 140u_2 + 80u_3$$

De ondernemer, die een dergelijk bod ontvangt, zal nu als volgt redeneren: de dekking van produkt A bedraagt 45 gulden per eenheid. Produkt A vraagt 2 uren van machine 1, 1 uur van machine 2 en 1 uur arbeid, die bij verhuur $2u_1 + u_2 + u_3$ gulden opbrengen. Het in produktie nemen van produkt A blijft dus aantrekke-

lijk zolang $45 \geq 2u_1 + u_2 + u_3$. Zolang deze restrictie geldt zal de ondernemer niet tot verhuur overgaan. De buitenstaander moet dus zodanige prijzen u_1, u_2 en u_3 bieden, dat geldt:

$$2u_1 + u_2 + u_3 \geq 45$$

Evenzeer moet gelden:

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 30$$

(immers indien dit niet zou gelden is het voor de ondernemer aantrekkelijker om produkt B te maken, dan om capaciteiten te gaan verhuren). De buitenstaander wordt dus geconfronteerd met het volgende probleem:
minimeer

$$120u_1 + 140u_2 + 80u_3$$

onder de voorwaarden

$$2u_1 + u_2 + u_3 \geq 45 \qquad u_1, u_2, u_3 \geqq 0$$

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 30$$

6.2. HET PRIMALE EN HET DUALE PROBLEEM

Men kan ieder lineair programmeringsprobleem schrijven in de vorm:
maximeer

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

onder de voorwaarden

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + x_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Deze vorm noemt men de *primale vorm* van het lineair programmeringsprobleem. (Het is mogelijk dat in de primale vorm negatieve constanten in het rechterlid voorkomen.) Bij ieder lineair programmeringsprobleem behoort het zogeheten duale probleem. Dit duale probleem kunnen wij als volgt formuleren. Bij iedere restrictie hoort een duale variabele; er zijn dus m duale variabelen u_1, u_2, ..., u_m. De doelstellingsfunctie van het duale probleem is $b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots + b_mu_m$.
Deze doelstellingsfunctie moet worden geminimeerd. Bij iedere variabele van het primale probleem behoort een restrictie, er zijn dus n restricties en deze hebben de volgende vorm:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots\ldots + a_{m1}u_m \geq c_1$$

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots\ldots + a_{m2}u_m \geq c_2$$

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots\ldots + a_{mn}u_m \geq c_n$$

Tenslotte moet ook gelden:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m \geq 0$$

Het probleem van de buitenstaander in paragraaf 6.1. is dus het duale probleem van de ondernemer uit paragraaf 2.2.

6.3. EEN NUMERIEK VOORBEELD

Ter illustratie van het in de voorgaande paragraaf besprokene geven wij hier een numeriek voorbeeld. In paragraaf 5.5. ontmoetten wij het volgende probleem:
maximeer

$$10x_1 + 12x_2$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 = 25$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Om van dit probleem het duale probleem te kunnen vinden moeten we het eerst in de primale vorm schrijven. Van de ≥ -restrictie maken wij gemakkelijk een ≤ -restrictie, n.l. door te vermenigvuldigen met -1. De = -restrictie schrijven wij als twee restricties, n.l.

$$x_1 + x_2 \leq 25$$

en

$$x_1 + x_2 \geq 25$$

Hiervan vermenigvuldigen wij de laatste restrictie met -1 teneinde de primale vorm te verkrijgen. Wij vinden aldus
maximeer

$$10x_1 + 12x_2$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leq 60$$
$$x_1 + x_2 \leq 25$$
$$-x_1 - x_2 \leq -25$$
$$-2x_1 - 2x_2 \leq -40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Het duale probleem is:
minimeer

$$60u_1 + 25u_2 - 25u_3 - 40u_4$$

onder de voorwaarden

$$2u_1 + u_2 - u_3 - 2u_4 \geq 10$$
$$4u_1 + u_2 - u_3 - 2u_4 \geq 12$$
$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geqq 0$$

6.4. HET OPLOSSEN VAN HET DUALE PROBLEEM

Wij lossen thans het in paragraaf 6.1. geformuleerde duale probleem op. Wij schrijven dit probleem als:
minimeer

$$120u_1 + 140u_2 + 80u_3 \qquad + Mu_6 + Mu_7$$

onder de voorwaarden

$$2u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \qquad + u_6 \qquad = 45$$
$$u_1 + 2u_2 + u_3 \qquad - u_5 \qquad + u_7 = 30$$

De oplossing van het duale probleem lezen wij af uit het laatste tableau van tabel 6.1.: $u_1 = 15$, $u_2 = 0$, $u_3 = 15$. De buitenstaander moet dus 15 gulden per capaciteitseenheid van machine 1, 0 gulden per capaciteitseenheid voor machine 2 en 15 gulden per uur arbeid bieden. Deze prijzen zijn de schaduwprijzen van de restricties van het oorspronkelijke probleem. Het minimale bod, dat de buitenstaander met succes kan uitbrengen is 3000, hetgeen precies gelijk is aan de maximale winst van de ondernemer.
De z-rij van het laatste tableau kan men schrijven als:

$$z = 3000 + 20u_2 + 40u_4 + 40u_5$$

Tableau	basis	z	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	RL
0	z	1	-120	-140	-80	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
	(u_6)	0	2	1	1	-1	0	1	0	45
	(u_7)	0	1	2	1	0	-1	0	1	30
1	z	1	-120	-140	-80	0	0	0	0	0
		0	3	3	2	-1	-1	0	0	75
	u_6	0	(2)	1	1	-1	0	1	0	45
	u_7	0	1	2	1	0	-1	0	1	30
2	z	1	0	-80	-20	-60	0	.	0	2700
		0	0	3/2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	.	0	$7\frac{1}{2}$
	u_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	.	0	$22\frac{1}{2}$
	u_7	0	0	(3/2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	.	1	$7\frac{1}{2}$
3	z	1	0	0	20/3	-100/3	-160/3	.	.	3100
		0	0	0	0	0	0	.	.	0
	u_1	0	1	0	1/3	-2/3	1/3	.	.	20
	u_2	0	0	1	(1/3)	1/3	-2/3	.	.	5
4	z	1	0	-20	0	-40	-40	.	.	3000
		.	.	.	.	.	.	.	.	.
	u_1	0	1	-1	0	-1	1	.	.	15
	u_3	0	0	3	1	1	-2	.	.	15

- tabel 6.1. Het optimale produktiepakket.
Oplossing van het duale probleem -

Wil men in de oplossing $u_2 = 1$ maken dan zal dus de waarde van z toenemen met 20. Men kan dit als volgt interpreteren: indien de buitenstaander 1 gulden per capaciteitseenheid van machine 2 gaat bieden, dan moet hij zijn totale bod met 20 gulden verhogen om het nog juist acceptabel te doen zijn. Dit komt omdat de ondernemer nog 20 ongebruikte eenheden van machine 2 heeft. Wil men in de oplossing $u_4 = 1$ maken, dan zal de waarde van z toenemen met 40. Men kan dit als volgt interpreteren: indien

de buitenstaander aan surplusvariabele u_4 de waarde 1 wil geven, betekent dit dat in feite de eerste restrictie wordt

$$2u_1 + u_2 + u_3 \geq 46$$

De buitenstaander moet dan zijn totale bod met 40 verhogen, omdat de opbrengst voor de ondernemer van produkt A met 1 gulden toeneemt en de ondernemer in zijn optimale programma 40 eenheden A produceert.
Het is dus geen toeval, dat in de z-rij van het laatste tableau van het duale probleem de waarden van de basis-variabelen van de optimale oplossing van het primale probleem staan.
Zonder bewijs geven wij de volgende stelling:
Als het primale probleem een eindige optimale oplossing heeft, heeft het duale probleem eveneens een eindige optimale oplossing. De optimale waarde van de doelstellingsfunctie van het primale probleem is dan gelijk aan de optimale waarde van de doelstellingsfunctie van het duale probleem.

6.5. VRAAGSTUKKEN

6-1. a. Formuleer het duale probleem van het in vraagstuk 2-1 geformuleerde probleem.
Welke betekenis kan men aan de duale variabelen toekennen? Op welke wijze kan men de restricties van het duale probleem interpreteren? Hoe kan men de doelstellingsfunctie van het duale probleem interpreteren?

b. Los het duale probleem op met behulp van de simplex-methode.

6-2. a. Formuleer het duale probleem van het in paragraaf 5.1. gegeven dieet probleem.

b. Los het duale probleem op met behulp van de simplex-methode.

6-3. a. Formuleer het duale probleem van het in vraagstuk 5-2 gegeven dieetprobleem.
b. Los het duale probleem op met behulp van de simplex-methode.

6-4. Gegeven is het volgende probleem:
minimeer

$$10x_1 + 14x_2 + 5x_3$$

onder de voorwaarden

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geqq 16$$
$$5x_1 - x_2 + 3x_3 \geqq 12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

a. Schrijf dit probleem in de primale vorm.
b. Formuleer het duale probleem.

6-5. Beschouw opnieuw het probleem van klokkenfabriek Frisia, zoals geformuleerd in vraagstuk 2-2 en schrijf het bij dit vraagstuk behorende LP-model op.
a. Voeg aan iedere restrictie een duale variabele toe. Geef bij elke duale variabele aan welke (economische) betekenis men aan deze variabele kan toekennen.
b. Formuleer het duale probleem.
c. Los het duale probleem op met behulp van de simplex-methode.

6-6. Beschouw opnieuw de bouwonderneming van vraagstuk 2-7 en schrijf het bij dit vraagstuk behorende LP-model op.
a. Voeg aan iedere restrictie een duale variabele toe. Geef bij elke duale variabele afzonderlijk aan welke (economische) betekenis men aan deze variabele kan toekennen.
b. Schrijf het probleem in de primale vorm.
c. Formuleer het duale probleem.

7. GEVOELIGHEIDSANALYSE

7.1. GEVOELIGHEIDSANALYSE VAN DE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNCTIE

In paragraaf 3.3. hebben wij aan de hand van de grafische oplossingsmethode reeds laten zien hoe men de gevoeligheid van de gevonden oplossing voor een verandering in één der coëfficiënten van de doelstellingsfunctie kan onderzoeken. Wij willen thans laten zien hoe men bij een groter probleem (d.w.z. een probleem met meer dan twee beslissingsvariabelen) deze gevoeligheidsanalyse uitvoert.

Wij beschouwen het volgende probleem:
maximeer

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 60 \qquad \text{I} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 100 \qquad \text{II}$$

De oplossing van dit probleem is gegeven in tabel 7.1. Voor zéér kleine wijzigingen in c_1 (bijvoorbeeld $c_1 = 7{,}99$ in plaats van $c_1 = 8$) zal de optimale oplossing vermoedelijk niet gevoelig zijn. Preciezer gezegd: de bij $c_1 = 8$ behorende optimale oplossing $x_1 = 40$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$ en $x_4 = 0$ is vermoedelijk ook de optimale oplossing als $c_1 = 7{,}99$.

Wij gaan nu de coëfficiënten van de doelstellingsfunctie één voor één variëren en vragen ons af binnen welke grenzen deze coëfficiënten kunnen variëren zonder dat de optimale oplossing verandert. Als wij dus c_1 variëren, nemen wij aan dat c_2, c_3 en c_4 ongewijzigd blijven en zoeken dan de getallen a en b waarvoor geldt: voor iedere c_1 die voldoet aan $a < c_1 < b$, geldt dat de bij $c_1 = 8$ behorende optimale oplossing ($x_1 = 40$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$, $x_4 = 0$) de optimale oplossing is.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	-8	-6	-5	-4	0	0	0
x_5	0	1	2	1	1	1	0	60
x_6	0	(2)	2	1	3	0	1	100
z	1	0	2	-1	8	0	4	400
x_5	0	0	1	($\frac{1}{2}$)	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	10
x_1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	3/2	0	$\frac{1}{2}$	50
z	1	0	4	0	7	2	3	420
x_3	0	0	2	1	-1	2	-1	20
x_1	0	1	0	0	2	-1	1	40

- tabel 7.1. -

Voor c_2, c_3 en c_4 zoeken wij soortgelijke intervallen.
Wij merken op dat wij kunnen schrijven voor de waarde van z in de optimale oplossing:

$$420 = 8 * 40 + 5 * 20$$

Men zegt nu: de z-rij in het laatste tableau is een lineaire combinatie van de z-rij in het eerste simplex-tableau en de tweede en derde rij in het laatste simplex-tableau. Wij kunnen schrijven:

$$4 = -6 + 8 * 0 + 5 * 2$$

$$7 = -4 + 8 * 2 + 5 * (-1)$$

$$2 = 0 + 8 * (-1) + 5 * 2$$

$$3 = 0 + 8 * 1 + 5 * (-1)$$

Ofwel, als wij in plaats van de getallen 8, 6, 5, 4 schrijven c_1, c_2, c_3 en c_4:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = -c_2 + c_1 * 0 + c_3 * 2 \\ 7 = -c_4 + c_1 * 2 + c_3 * (-1) \\ 2 = 0 + c_1 * (-1) + c_3 * 2 \\ 3 = 0 + c_1 * 1 + c_3 * (-1) \end{array}\right\} \quad (A)$$

In paragraaf 4.4. zagen wij reeds dat in de z-rij van het laatste tableau voor de kolommen van de echte variabelen de reduced revenues voorzien van een -teken verschijnen. De reduced revenue van produkt 2 is hier dus -4 en dit betekent, dat met de huidige waarden van c_1, c_2, c_3 en c_4 introductie van één eenheid van produkt 2 de waarde van de doelstellingsfunctie met 4 zou doen dalen. Men kan dit ook inzien als volgt. Voor de eerste vergelijking van stelsel A kan men schrijven:

$$-4 = c_2 - c_1 * 0 - c_3 * 2$$

ofwel: de reduced revenue van produkt 2 is gelijk aan de bruto-marge van produkt 2 verminderd met het aantal eenheden van produkt 1 dat men zou moeten opgeven om één eenheid van produkt 2 te kunnen maken × de bruto-marge van produkt 1 en eveneens verminderd met het aantal eenheden van produkt 3, dat men zou moeten opgeven om één eenheid van produkt 1 te kunnen maken × de bruto-marge van produkt 3.
Een soortgelijke interpretatie kan men geven aan de andere drie vergelijkingen van stelsel A, met dit verschil, dat men bij de slack-variabelen spreekt over imputed costs in plaats van over reduced revenue. De derde vergelijking bijvoorbeeld kan men als volgt interpreteren: de imputed costs van de eerste restrictie is gelijk aan het aantal eenheden van produkt 1 dat men moet opofferen om één capaciteitseenheid van restrictie I ongebruikt te laten × de bruto-marge van produkt 1 plus het aantal eenheden van produkt 3 dat men moet opofferen om één capaciteitseenheid van restrictie I ongebruikt te laten × de bruto-marge van produkt 3.

Uit bovenstaande interpretatie kan men tevens concluderen, dat de optimale oplossing bij verandering van de waarden van c_1, c_2, c_3 en c_4 de optimale oplossing blijft, zolang geldt dat de waarden van de uitdrukkingen:

$$-c_2 + c_1 * 0 + c_3 * 2$$
$$-c_4 + c_1 * 2 + c_3 * (-1)$$
$$0 + c_1 * (-1) + c_3 * 2$$
$$0 + c_1 * 1 + c_3 * (-1)$$

alle > 0 zijn.
Vragen wij ons af binnen welke grenzen nu c_2 kan variëren zonder dat de optimale oplossing verandert, dan moet blijkbaar gelden voor een nieuwe waarde c_2^1:

$$- c_2^1 + 8 * 0 + 5 * 2 > 0$$

ofwel

$$c_2^1 < 10$$

Het blijkt in de praktijk gemakkelijker te zijn om te rekenen met de verandering in c_2. Deze noemen wij Δc_2 (er geldt dus $c_2^1 = c_2 + \Delta c_2$). Wij vinden dan:

$$- (6 + \Delta c_2) + 8 * 0 + 5 * 2 > 0$$

ofwel

$$\Delta c_2 < 4$$

Deze grens kunnen wij onmiddellijk in het laatste simplex-tableau aflezen. Wij constateren dus:
Bij toeneming van de bruto-marge van een niet-basisvariabele blijft de optimale oplossing ongewijzigd, zolang deze toeneming kleiner is, dan de coëfficiënt van die variabele in de z-rij van het laatste tableau. Anders gezegd: bij toeneming van de bruto-marge van een niet-basisvariabele blijft de optimale oplossing ongewijzigd, zolang deze toeneming kleiner is dan de absolute waarde van de reduced revenue van die variabele.

Voor basisvariabelen ligt de situatie iets gecompliceerder. Kiezen wij als voorbeeld variabele 1, dan weten wij dat de optimale oplossing niet verandert zolang aan de volgende 4 ongelijkheden is voldaan:

$$-6 + (8 + \Delta c_1) * 0 + 5 * 2 > 0$$

$$-4 + (8 + \Delta c_1) * 2 + 5 * (-1) > 0$$

$$0 + (8 + \Delta c_1) * (-1) + 5 * 2 > 0$$

$$0 + (8 + \Delta c_1) * 1 + 5 * (-1) > 0$$

Voor deze vier vergelijkingen kan men ook schrijven:

$$4 + 0 * \Delta c_1 > 0$$

$$7 + 2 * \Delta c_1 > 0$$

$$2 - 1 * \Delta c_1 > 0$$

$$3 + \Delta c_1 > 0$$

Aan deze vier vergelijkingen moet tegelijkertijd zijn voldaan. Er moet dus gelden $7 + 2\Delta c_1 > 0$ en $3 + \Delta c_1 > 0$ ofwel $\Delta c_1 > - 3\frac{1}{2}$ en $\Delta c_1 > - 3$. De grootste beperking wordt gevormd door

$\Delta c_1 > -3$, zodat de benedengrens voor Δc_1 gelijk is aan -3. De bovengrens wordt gegeven door $\Delta c_1 < 2$. Wij hebben nu dus gevonden:

$$-3 < \Delta c_1 < 2$$

De bovenstaande vier eenvoudige vergelijkingen kan men ook direct uit het laatste simplex-tableau afleiden. De getallen 4, 7, 2 en 3 zijn de coëfficiënten in de z-rij van de niet-basisvariabelen en de getallen 0, 2, -1 en 1 zijn de coëfficiënten in de x_1-rij van de niet-basisvariabelen.
Men kan derhalve de grenzen, waarbinnen Δc_1 mag variëren als volgt bepalen. Vorm de breuken met als teller de coëfficiënten van de niet-basisvariabelen in de z-rij en als noemer de coëfficiënten van de niet-basisvariabelen in de x_1-rij en voeg aan deze breuken een -teken toe. Wij krijgen dan de breuken:

$$-\frac{4}{0}, \quad -\frac{7}{2}, \quad -\frac{2}{-1}, \quad -\frac{3}{1}$$

Kies nu van de aldus gevonden getallen van alle negatieve getallen de grootste en van de positieve getallen de kleinste (niet-gedefinieerde breuken, zoals 4/0 in dit voorbeeld, blijven buiten beschouwing). Wij vinden dan -3 en +2:

$$-3 < \Delta c_1 < 2$$

ofwel $(c_1^1 = 8 + \Delta c_1)$:

$$5 < c_1^1 < 10$$

Bovenstaande gevoeligheidsanalyse berust geheel op de veronderstelling, dat alle overige gegevens (dus ook de andere coëfficiënten van de doelstellingsfunctie) ongewijzigd blijven.

7.2. GEVOELIGHEIDSANALYSE VAN HET RECHTER LID

In hoofdstuk 3, 4 en 5 bespraken wij het probleem van het optimale produktiepakket:
maximeer

$$45x_1 + 30x_2$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + x_2 \leq 120 \qquad \text{I}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 140 \qquad \text{II}$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \qquad \text{III}$$

In paragraaf 3.1. hebben wij reeds laten zien dat voor een verruiming van de eerste restrictie met één eenheid (d.w.z. voor $b_1 = 121$ in plaats van $b_1 = 120$) de waarde van de doelstellingsfunctie toeneemt met de schaduwprijs van restrictie 1 (in dit voorbeeld behoort bij restrictie 1 een schaduwprijs $u_1 = 15$).
De vraag is nu: binnen welke grenzen kan b_1 variëren zonder dat de waarde van de schaduwprijs van restrictie 1 verandert?
Om deze vraag te beantwoorden beginnen wij met de volgende opmerking. Een verandering van b_1 kan de optimale oplossing op twee manieren beïnvloeden. In de eerste plaats kan een verandering van b_1 leiden tot andere waarden van de basisvariabelen, terwijl de verzameling basisvariabelen ongewijzigd blijft. Dit betekent, dat in het laatste simplex-tableau alleen in de laatste kolom (die van het rechterlid, waarin de waarden van de basisvariabelen staan) wijzigingen optreden, maar dat alle andere kolommen ongewijzigd blijven. Ook de schaduwprijzen blijven dan ongewijzigd.
In de tweede plaats kan de verandering in b_1 zo groot zijn, dat andere variabelen in de basis worden opgenomen. Dit leidt tot een andere verzameling basisvariabelen en tevens tot andere schaduwprijzen.
Wij concluderen dus, dat de schaduwprijs van restrictie 1 (nl. $u_1 = 15$) ongewijzigd blijft zolang de verandering van b_1 zo klein is, dat de huidige verzameling basisvariabelen (x_1, x_2, x_4) ongewijzigd blijft (zie tabel 7.2.).

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	15	0	15	3000
x_1	0	1	0	1	0	-1	40
x_4	0	0	0	1	1	-3	20
x_2	0	0	1	-1	0	2	40

- tabel 7.2. Laatste simplex-tableau voor het probleem van het optimale produktiepakket -

Stel nu dat de waarde van b_1 wordt gewijzigd in $b_1^1 = 121$. Wij zouden dan het probleem opnieuw kunnen oplossen en zouden dan vinden het simplex-tableau van tabel 7.3.:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	15	0	15	3015
x_1	0	1	0	1	0	-1	41
x_4	0	0	0	1	1	-3	21
x_2	0	0	1	-1	0	2	39

- tabel 7.3. Laatste simplex-tableau als $b_1^1 = 121$ -

In feite hebben wij het tableau van tabel 7.3. niet gevonden door het probleem opnieuw met behulp van de simplex-methode op te lossen, maar door als volgt te redeneren. In de kolom van de bij restrictie 1 behorende spelingsvariabele staat hoeveel eenheden wij van de basisvariabelen moeten opofferen om één eenheid van die spelingsvariabele in de oplossing te kunnen introduceren. Verruiming van restrictie 1 met één eenheid (d.w.z. wijziging van $b_1 = 120$ in $b_1^1 = 121$) is precies het tegenovergestelde. Wij kunnen dus door de verruiming met één eenheid van restrictie 1 één eenheid x_1 en één eenheid x_4 extra in de oplossing brengen, terwijl wij één eenheid x_2 moeten opgeven (Opm.: de schaduwprijs van restrictie 1 is gelijk aan $1 * 45 + 1 * 0 - 1 * 30 = 15$, d.w.z. gelijk aan de extra eenheden van de basisvariabelen die wij in de oplossing kunnen introduceren c.q. moeten opgeven vermenigvuldigd met de dekkingsbijdragen per eenheid). Wij vinden dus:

$$\text{Nieuwe oplossing} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 40 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3015 \\ 41 \\ 21 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Veranderen wij de waarde van b_1 in $b_1^1 = 120 + \Delta b_1$, dan is de nieuwe oplossing:

$$\text{Nieuwe oplossing} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 40 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 + 15\Delta b_1 \\ 40 + \Delta b_1 \\ 20 + \Delta b_1 \\ 40 - \Delta b_1 \end{pmatrix}$$

Zolang de waarden van alle variabelen in deze nieuwe oplossing niet negatief zijn, is deze nieuwe oplossing feasible en dus optimaal. Er moet dus gelden:

$$40 + \Delta b_1 \geq 0$$

$$20 + \Delta b_1 \geq 0$$

$$40 - \Delta b_1 \geq 0$$

Aan deze drie ongelijkheden is voldaan als geldt

$$-20 \leq \Delta b_1 \leq 40$$

Wij concluderen dus dat de schaduwprijs $u_1 = 15$ ongevoelig is voor wijzigingen in b_1, zolang geldt

$$100 \leq b_1^1 \leq 160$$

Om deze "range of feasibility" voor Δb_1 te vinden, kan men dus de volgende procedure toepassen: Vorm de breuken met als teller de waarden van de basisvariabelen in het rechterlid en als noemer de coëfficiënten in de kolom van de bij restrictie 1 behorende spelingsvariabele en voeg een -teken toe. Wij krijgen dan:

$$-\frac{40}{1}, \quad -\frac{20}{1}, \quad -\frac{40}{-1}$$

Kies nu van de negatieve getallen de grootste en van de positieve getallen de kleinste. Dit zijn de grenzen voor Δb_1:

$$-20 < \Delta b_1 < 40$$

De boven beschreven procedure geldt alleen voor een verandering van $\leq$ -restricties. Voor een verandering van een $\geq$ -restrictie geldt een soortgelijke procedure. In plaats van de getallen in de kolom van de spelingsvariabele neemt men dan de getallen in de kolom van de surplus-variabele, terwijl men bovendien aan de zo gevormde breuken geen -teken behoeft toe te voegen. Het bewijs van de juistheid van deze procedure laten wij aan de lezer over.

7.3. VRAAGSTUKKEN

7-1. Wij herhalen de probleemstelling van vraagstuk 4-1:

Produkt	A	B	C	Capaciteit
Dekking per eenheid	ƒ 50,-	ƒ 30,-	ƒ 60,-	
Capaciteitsbeslag in manuren	3	1	2	2000 (manuren)
Capaciteitsbeslag machines type I	1	2	2	1400 (machine-uren type I)
Capaciteitsbeslag machines type II	2	2	1	1500 (machine-uren type II)

Het laatste simplex-tableau luidt:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	0	20	0	10	20	0	48000
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300
x_3	0	0	$1\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	550
x_6	0	0	$1\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	350

Hierin zijn x_1, x_2 en x_3 echte variabelen (produkten A, B en C) en x_4, x_5 en x_6 spelingsvariabelen behorende bij de restricties manuren, machine-uren type I en machine-uren type II.

a. Zou men het verlies van deze onderneming tot nul kunnen reduceren, als men 25 man zou kunnen ontslaan?

b. Stel dat de grondstofkosten van produkt A toenemen van ƒ 60,- tot ƒ 70,- per eenheid produkt. Heeft deze wijziging invloed op de optimale samenstelling van het produktiepakket? Heeft deze wijziging invloed op het verlies van de onderneming per dag? Zo ja, hoe groot is dit verlies nu?

c. Stel dat de onderneming een mogelijkheid ziet om de verkoopprijs van produkt B te verhogen. Hoe hoog zou deze verkoopprijs moeten zijn teneinde opneming van produkt B in het produktiepakket voor de onderneming aantrekkelijk te maken?

7-2. Wij herhalen de probleemstelling van vraagstuk 4-2. b:

Produkt	A	B	C	Beschikbare capaciteit
Dekking per eenheid	ƒ 200,-	ƒ 300,-	ƒ 250,-	
Capaciteitsbeslag afdeling I	2	4	4	1800
Capaciteitsbeslag afdeling II	4	5	2	3000

Het laatste simplex-tableau luidt:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	25	0	50	25	16500
x_3	0	0	½	1	1/3	-1/6	100
x_1	0	1	1	0	-1/6	1/3	700

Hierin zijn x_1, x_2 en x_3 echte variabelen (produkten A, B en C) en x_4 en x_5 spelingsvariabelen behorende bij afdeling I en II.

a. Stel, dat de dekkingsbijdrage van produkt B toeneemt tot ƒ 330,- per eenheid, wordt dit produkt dan in het optimale produktiepakket opgenomen?

b. Stel dat de dekkingsbijdrage van het nieuwe produkt C daalt tot ƒ 225,- per eenheid, verandert dan de samenstelling van het optimale produktiepakket?
Heeft deze wijziging invloed op de behaalde dekking?
Zo ja, hoe groot is dan nu de behaalde dekking?

c. Kunt u zonder het probleem opnieuw met behulp van de simplex-methode op te lossen berekenen met welk bedrag de behaalde dekking toeneemt als de beschikbare capaciteit van afdeling II toeneemt van 3000 tot 3500 uur? Zelfde vraag voor een toeneming van de capaciteit van afdeling II van 3000 tot 4000 uur.

7-3. Wij gaan uit van het in vraagstuk 4-6 gegeven probleem. Het laatste simplex-tableau behorende bij dit probleem luidt:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	0	2	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	3	950
x_1	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50
x_3	0	0	2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	75

a. Stel dat de verkoopprijs van halffabrikaat 1 daalt van ƒ 17,-- tot ƒ 14,50, verandert dan de samenstelling van het optimale produktiepakket? Heeft deze daling van de verkoopprijs van halffabrikaat 1 invloed op de in totaal behaalde dekking? Zo ja, hoe groot is dan nu de in totaal behaalde dekking?

b. Als de verkoopprijs van halffabrikaat 2 toeneemt van ƒ 32,-- tot ƒ 35,--, wordt halffabrikaat 2 dan opgenomen in het optimale produktiepakket?

c. Op de engineering-afdeling krijgt iemand anders nog een idee. Door een kleine wijziging in het ontwerp van de nieuwe installatie lijkt het mogelijk om per dag 200 kg van stof A aan het afvalwater te onttrekken in plaats van 100 kg. De vaste kosten van de installatie nemen door deze wijziging toe van ƒ 1200,-- per dag tot ƒ 1250,-- per dag.
Kunt u uitgaande van de gegevens in bovenstaand simplex-tableau berekenen of het in gebruik nemen van de gewijzigde installatie nu - bedrijfseconomisch gezien - wel aantrekkelijk is?

8. ENKELE MET LINEAIRE PROGRAMMERING VERBAND HOUDENDE ONDERWERPEN

8.1. MEERVOUDIGE DOELSTELLINGEN

Het komt dikwijls voor, dat men in een praktijksituatie te maken heeft met meervoudige doelstellingen. Bij wijze van voorbeeld beschouwen wij het volgende probleem. Een onderneming wenst de samenstelling van het produktenassortiment te kiezen op zodanige wijze, dat enerzijds de dekkingsbijdrage zo groot mogelijk is, terwijl men anderzijds wenst te streven naar een zo groot mogelijke werkgelegenheid. De onderneming kan twee produkten maken, waarvan de gegevens zijn vermeld in tabel 8.1.

	Produkt 1	Produkt 2
Verkooppijs	49	64
Grondstofkosten	15	20
Dekking I	34	44
Loonkosten	20	40
Dekking II	14	4

- tabel 8.1. -

Er zijn twee machines; het capaciteitsbeslag per machine per eenheid produkt en de maximaal beschikbare capaciteiten zijn gegeven in tabel 8.2.:

	Produkt 1	Produkt 2	Maximale capaciteit
Machine 1	4	2	280
Machine 2	2	2	200
Arbeid	2	4	

- tabel 8.2. -

Wij kunnen dit probleem formuleren als een lineair-programmeringsprobleem als wij één van de twee doelstellingen opnemen als een restrictie en de andere doelstelling beschouwen als de doelstellingsfunctie. Wij kiezen voorlopig het streven naar een zo groot mogelijke dekkingsbijdrage als doelstellingsfunctie en formuleren het streven naar een zo groot mogelijke werkgelegenheid als restrictie.

Het aantal produktief bestede arbeidsuren is $2x_1 + 4x_2$ als wij x_1 eenheden van produkt 1 en x_2 eenheden van produkt 2 maken. Daarnaast kunnen wij besluiten een bepaald aantal arbeidsuren niet te gebruiken. Om deze mogelijkheid in het model tot uitdrukking te brengen voeren wij in een fictief produkt 3, waarvan de gegevens zijn vermeld in tabel 8.3.

Kostprijsgegevens:		Capaciteitsbeslag:	
Verkoopprijs	0	Machine 1	0
Grondstofkosten	0	Machine 2	0
Dekking I	0	Arbeid	1
Loonkosten	10		
Dekking II	-10		

- tabel 8.3. Gegevens fictief produkt 3 -

Het model kan nu als volgt worden geformuleerd:
maximeer

$$z = 14x_1 + 4x_2 - 10x_3$$

onder de voorwaarden

$4x_1 + 2x_2$	≤ 280	machine 1
$2x_1 + 2x_2$	≤ 200	machine 2
$2x_1 + 4x_2 + x_3$	$\geq y$	werkgelegenheid

Wij zijn nu met name geïnteresseerd in de relatie tussen z en y, met andere woorden wij zoeken de vorm van de functie $z = f(y)$.
Wij lossen daartoe het bovenstaande LP-probleem enkele malen op voor verschillende waarden van y. Voor y = 100 krijgen wij het volgende probleem:

$$
\begin{aligned}
z - 14x_1 - 4x_2 + 10x_3 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\
4x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad &= 280 \\
2x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \quad &= 200 \\
2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad - x_6 &= 100
\end{aligned}
$$

De simplex-tableaus zijn gegeven in tabel 8.4. In tabel 8.4. hebben wij geen kunstmatige variabele behoeven te introduceren omdat bij de laatste rij zeer gemakkelijk x_3 als basisvariabele kan worden geïntroduceerd. Wij hebben tableau 1 laten ontstaan door de met -10 vermenigvuldigde laatste rij van tableau 0 op te tellen bij de eerste rij van tableau 0.

De optimale oplossing is $z = 980$, $x_1 = 70$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 60$, $x_6 = 40$. De surplus variabele behorende bij $2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 100$ is dus gelijk aan 40. Dit houdt in, dat voor waarden van $y \leq 140$ geldt: $z = 980$.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
0		1	-14	-4	10	0	0	0	0
		0	4	2	0	1	0	0	280
		0	2	2	0	0	1	0	200
		0	2	4	1	0	0	-1	100
1	z	1	-34	-44	0	0	0	10	-1000
	x_4	0	4	2	0	1	0	0	280
	x_5	0	2	2	0	0	1	0	200
	x_3	0	2	(4)	1	0	0	-1	100
2	z	1	-12	0	11	0	0	-1	100
	x_4	0	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	230
	x_5	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	150
	x_2	0	($\frac{1}{2}$)	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	25
3	z	1	0	24	17	0	0	-7	700
	x_4	0	0	-6	-2	1	0	(2)	80
	x_5	0	0	-2	-1	0	1	1	100
	x_1	0	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	50

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
4	z	1	0	3	10	$3\frac{1}{2}$	0	0	980
	x_6	0	0	-3	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	40
	x_5	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	70

- Tabel 8.4. -

Wij lossen nu het probleem op soortgelijke wijze op voor y = 200. Het laatste simplex-tableau is gegeven in tabel 8.5.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	0	0	9	4	0	1	920
x_1	0	1	0	-1/6	1/3	0	1/6	60
x_5	0	0	0	-1/3	-1/3	1	1/3	40
x_2	0	0	1	1/3	-1/2	0	-1/3	20

- Tabel 8.5. -

De optimale oplossing is nu: z = 920. Wij zijn nu speciaal geïnteresseerd in de schaduwprijs van de laatste restrictie. Deze is gelijk aan 1. Voor y = 199 geldt nu z = 921 en voor y = 201 geldt z = 919. De grenzen waarbinnen deze schaduwprijs geldig blijft vinden wij door op te schrijven:

$$\frac{60}{1/6}, \quad \frac{40}{1/3}, \quad \frac{20}{-1/3}$$

360, 120

-60

De grenzen voor Δy zijn dus

$$-60 < \Delta y < 120$$

ofwel

$$140 < y < 320$$

Binnen deze grenzen is dus de schaduwprijs van de laatste restrictie gelijk aan 1.

Wij lossen nu het probleem nogmaals op voor y = 360. Het laatste simplex-tableau is gegeven in tabel 8.6.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	0	0	5	0	12	5	600
x_4	0	0	0	1	1	-3	-1	40
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	20
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	80

- Tabel 8.6. -

Voor y = 360 geldt dus z = 600. De schaduwprijs van de werkgelegenheidsrestrictie is 5 en de grenzen waarbinnen deze schaduwprijs constant blijft zijn:

$$\max\left(\frac{40}{-1}, \frac{80}{-\frac{1}{2}}\right) < \Delta y < \min\left(\frac{20}{\frac{1}{2}}\right)$$

ofwel

$$-40 < \Delta y < 40$$

ofwel

$$320 < y < 400$$

Tenslotte lossen wij het probleem nog eenmaal op voor y = 500. Het laatste tableau is dan gegeven in tabel 8.7.

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	10	0	0	0	22	10	-600
x_4	0	2	0	0	1	-1	0	80
x_2	0	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
x_3	0	-2	0	1	0	-2	-1	100

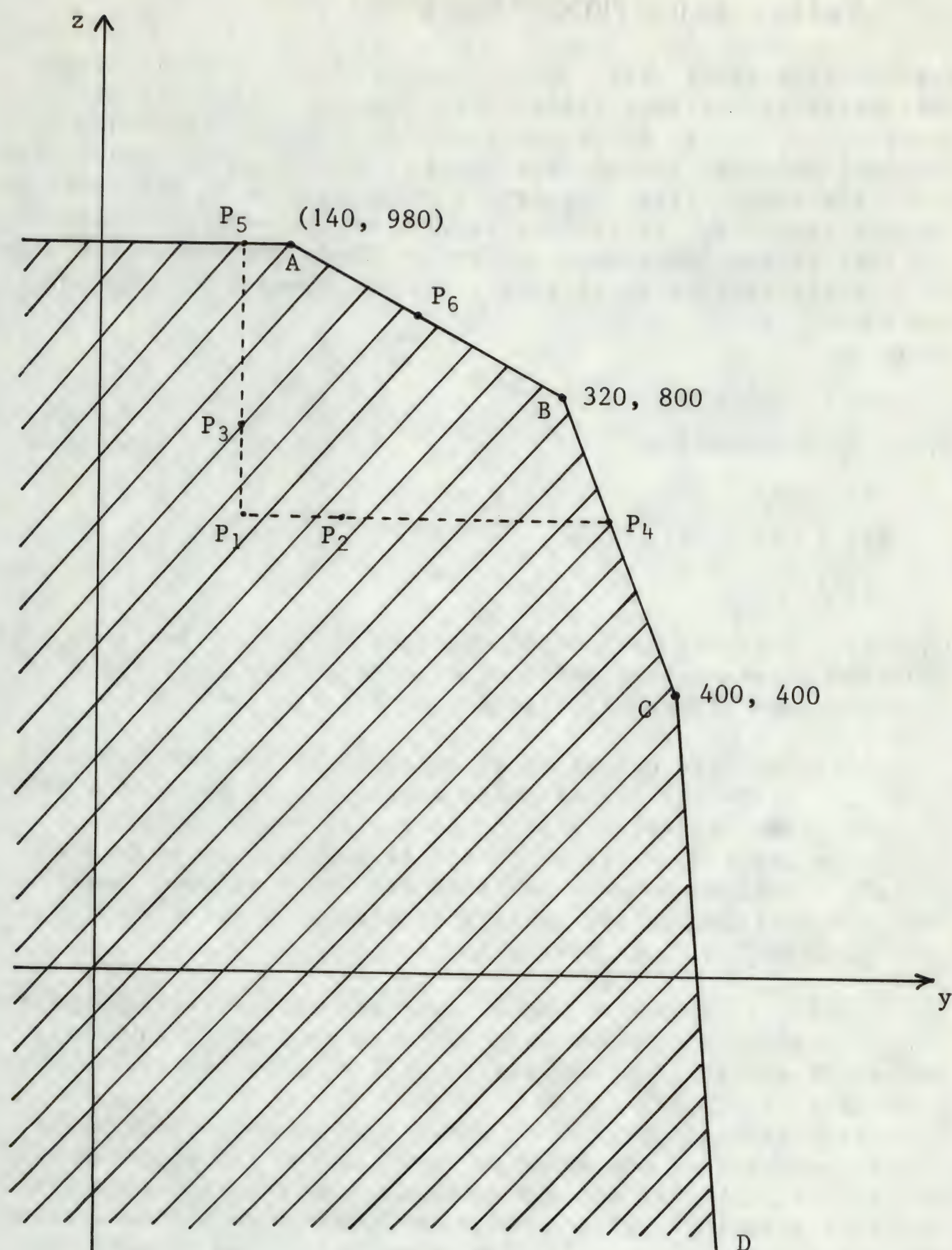
- Tabel 8.7. -

Voor y = 500 geldt dus z = -600. De schaduwprijs van de werkgelegenheidsrestrictie is 10. Deze schaduwprijs blijft constant zolang $\frac{100}{-1} < \Delta y$ ofwel zolang y > 400 is.

Wij kennen nu de waarde van z voor iedere waarde van y. In figuur 8.1. hebben wij z = f(y) in beeld gebracht.

Wij voeren nu in het begrip *efficiënte oplossing*. Wij gaan uit van een probleem met meer dan één doelstelling, waarbij deze doelstellingen alle gemaximeerd moeten worden. Wij noemen dan een oplossing efficiënt, indien er geen andere oplossing bestaat die ten aanzien van tenminste één doelstelling een hogere waarde heeft terwijl de waarden van de andere doelstellingen niet lager zijn. In figuur 8.1. is P_1 geen efficiënte oplossing, immers oplossing P_2 is qua werkgelegenheidsdoelstelling beter dan P_1 en qua winstdoelstelling niet slechter. Men zegt: oplossing P_1 wordt gedomineerd door P_2. Evenzo wordt P_1 gedomineerd door P_3. P_1 wordt ook gedomineerd door P_5, A, P_6, B en P_4. P_5 is ook geen efficiënte oplossing, want P_5 wordt gedomineerd door A. Wel efficiënt zijn alle oplossingen die overeenkomen met punten op de gebroken halve rechte A B C D ....
Het in figuur 8.1. gearceerde gebied kan men naar analogie van de bij lineaire programmering gebruikelijke terminologie de verzameling van de feasible solutions noemen. Deze verzameling is altijd convex, d.w.z. dat als twee punten P en Q beide tot de verzameling behoren alle punten op het lijnstuk PQ ook tot de verzameling behoren.

Uit de verzameling van efficiënte oplossingen (deze verzameling bestaat dus uit de punten op de gebroken halve rechte A B C D ......) zal men nu één oplossing moeten kiezen. De techniek van de lineaire programmering biedt bij deze keuze verder geen hulp.



- figuur 8.1. De verzameling van efficiënte oplossingen voor het winst-werkgelegenheidsprobleem -

8.2. GEHEELTALLIGE PROGRAMMERING

Tot dusverre hebben wij steeds aangenomen dat de beslissingsvariabelen x_i continue variabelen zijn, die alle waarden ≥ 0 kunnen aannemen. In de praktijk doet zich echter meermalen de situatie voor dat één of meer van de beslissingsvariabelen discrete variabelen zijn. Een van de mogelijkheden om dit probleem te omzeilen is de discrete variabelen te behandelen als continue variabelen. De gevonden oplossing wordt dan vervolgens voor de discrete variabelen afgerond. Wij beschouwen het volgende voorbeeld:
maximeer

$$25x_1 + 15x_2$$

onder de voorwaarden

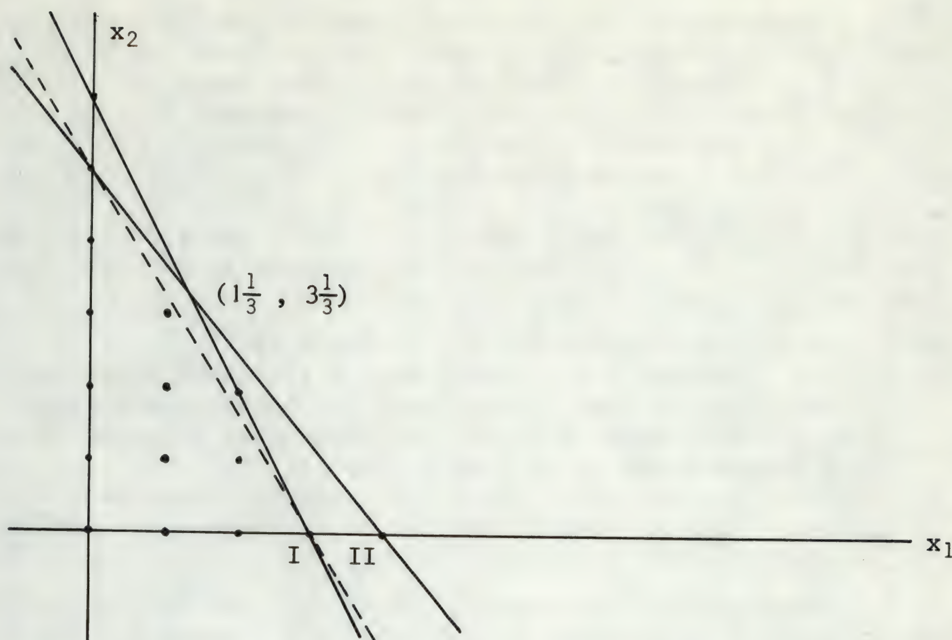
$$5x_1 + 4x_2 \leq 20 \qquad \text{I}$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 24 \qquad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

waar x_1, x_2 gehele niet-negatieve getallen zijn. Indien wij dit probleem oplossen door eerst x_1 en x_2 als continue variabelen te beschouwen vinden wij (zie figuur 8.2.): $x_1 = 1\ 1/3$, $x_2 = 3\ 1/3$.
Wij willen nu deze oplossing afronden en vinden dan $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 70$ (bij dit afronden moeten wij er natuurlijk voor zorgen dat de oplossing binnen het gebied van de feasible solutions blijft; in dit voorbeeld is gemakkelijk in te zien, dat wij door naar beneden af te ronden inderdaad een feasible solution verkrijgen, bij grotere problemen is dit niet altijd even gemakkelijk in te zien).

In figuur 8.2. hebben wij alle toegelaten geheeltallige oplossingen aangegeven. Tevens zien wij door de figuur nauwkeurig te bekijken, dat (2,2) een betere oplossing is dan (1,3). Voor $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ geldt $z = 80$.
Voor problemen als het bovenstaande zijn aparte oplossingsmethoden ontwikkeld. Men duidt de techniek van het oplossen van dergelijke problemen aan als geheeltallige programmering (integer programming). Zijn sommige beslissingsvariabelen continu en andere beslissingsvariabelen geheeltallig dan spreekt men van mixed integer programming.



- figuur 8.2. -

8.3. VRAAGSTUKKEN

8-1. De boer van vraagstuk 4-5 wordt in feite geconfronteerd met een keuzeprobleem met twee doelstellingsfuncties. Hij wenst enerzijds een zo hoog mogelijke bruto-winst en anderzijds zoveel mogelijk vrije tijd. Gedurende de maanden april tot en met september kan de boer zelfs als hij dat zou willen niet meer dan 1500 uur werken; werkt hij gedurende die periode 1500 - y uur, dan heeft hij y uur vrije tijd. Zij z de maximale bruto-winst, die de boer kan behalen, indien hij tenminste y uur vrije tijd wenst.

a. Maak een grafiek van de functie $z = f(y)$.
b. Wat is de verzameling van efficiënte oplossingen?

8-2. Een onderneming beschikt over een leegstaande bedrijfshal met een vloeroppervalkte van 1250 m². Men overweegt deze hal te gaan benutten, door er nieuw aan te schaffen machines in te installeren. Daarbij kan men kiezen uit twee typen machines,

die wij aanduiden met machines van type I en machines van type II. Voor één machine van type I is een vloeroppervlak van 200 m² nodig, voor één machine van type II een vloeroppervlak van 300 m². De onderneming kan ten hoogste ƒ 1,5 mln besteden voor de aanschaf van de nieuwe machines. De aanschafprijzen van de machines zijn: ƒ 400.000,-- voor een machine van type I en ƒ 300.000,-- voor een machine van type II.
Door het aanschaffen van machines van type I neemt de jaarlijkse bruto-winst toe met ƒ 10.000,-- per aangeschafte machine. Voor machines van type II is dit ƒ 12.000,--.

a. Formuleer dit probleem als een LP-probleem.
b. Los het probleem op met behulp van de grafische oplossingsmethode alsof de beslissingsvariabelen ook gebroken (niet-geheeltallige) waarden konden aannemen. Rond de gevonden uitkomst naar beneden af op gehele getallen.
c. Is de zo gevonden oplossing de optimale oplossing voor dit probleem? Zo niet, wat is dan wel de optimale oplossing?

8-3. Gegeven is een onderneming, die in principe drie produkten (A, B en C) zou kunnen maken. Van deze drie produkten zijn de volgende gegevens bekend:

	A	B	C
Verkoopprijs	110	100	105
Grondstofkosten	60	70	45
Dekking I	50	30	60
Loonkosten	60	20	40
Dekking II	-10	10	20

Verder zijn de volgende gegevens bekend:
- er zijn 200 machines van type I; na aftrek van tijd nodig voor onderhoud zijn per dag beschikbaar 1400 uren voor machines van type I
- er zijn 200 machines van type II; na aftrek van tijd nodig voor onderhoud zijn per dag beschikbaar 1500 uren voor machines van type II
- het capaciteitsbeslag van de produkten is als volgt:

	A	B	C
manuren	3	1	2
machines I	1	2	2
machines II	2	2	1

- de directe loonkosten bedragen ƒ 20,-- per manuur
- de kosten van salarissen van niet-direct produktief personeel, de afschrijvingen en de overige vaste kosten bedragen in totaal ƒ 10.000,-- per dag.

De leiding van deze onderneming wenst twee doelstellingen na te streven: enerzijds een zo hoog mogelijke winst, anderzijds een zo groot mogelijke werkgelegenheid.

a. Noem de behaalde winst per dag z en het aantal betaalde manuren per dag y. Bepaal dan z als functie van y en teken de grafiek.
b. Wat is de verzameling van efficiënte oplossingen?

9. PRODUKTIEPLANNING MET BEHULP VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

9.1. PROBLEEMSTELLING

Wij zullen in dit hoofdstuk laten zien hoe men vraagstukken met betrekking tot produktieplanning kan oplossen met behulp van lineaire programmering. Wij beschouwen daartoe een sterk vereenvoudigd voorbeeld.
Een onderneming produceert twee produkten A en B. De vraag naar die produkten in de komende drie perioden is bekend (zie tabel 9.1.).

	periode		
	1	2	3
Produkt A	1000	2500	6000
Produkt B	1500	1000	5000

- Tabel 9.1. Vraag per periode -

Bij deze onderneming kunnen drie capaciteitssoorten worden onderscheiden, n.l. machines, arbeid en opslagcapaciteit. De beschikbare capaciteiten zijn gegeven in tabel 9.2.:

	periode		
	1	2	3
Machines (uren)	560	560	560
Arbeid (uren)	350	300	350
Opslagcapaciteit (m^2 magazijnruimte)	8000	8000	8000

- Tabel 9.2. Beschikbare capaciteiten per periode -

Het capaciteitsbeslag per eenheid produkt voor de produkten A en B is gegeven in tabel 9.3.:

	Produkt A	Produkt B
Machines (uren)	0,12	0,1
Arbeid (uren)	0,05	0,08
Opstagcapaciteit (m^2)	1,5	2,0

- Tabel 9.3. Capaciteitsbeslag per eenheid produkt -

In tabel 9.2. zijn het aantal beschikbare machine-uren en arbeidsuren gegeven. Dit aantal uren betreft het aantal uren in de normale werktijd. Daarnaast is overwerk mogelijk en wel tot maximaal 50% van de in een bepaalde periode binnen de normale werktijd beschikbare uren.
De werkelijke voorraden aan het begin van periode 1 en de minimaal gewenste voorraden aan het einde van periode 3 zijn gegeven in tabel 9.4.

	Voorraad aan het begin van periode 1	Gewenste voorraad aan het eind van periode 3
A	900	800
B	400	600

- Tabel 9.4 -

De kosten van overwerk bedragen *f* 15,- per overgewerkt uur. De voorraadkosten bedragen 1,4% van de kostprijs van het opgeslagen produkt per periode. De kostprijs van produkt A is *f* 20,- van produkt B *f* 15,- per eenheid. Bij welk produktieprogramma is de som van voorraadkosten en overwerkkosten minimaal?

9.2. FORMULERING VAN HET MODEL

Allereerst geven wij aan welke variabelen wij als beslissingsvariabelen in het model wensen op te nemen. Noemen wij A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 de te produceren hoeveelheden gedurende de door de index aangegeven periode en SA_1, SA_2, SA_3, SB_1, SB_2, SB_3 de voorraden van het betreffende produkt aan het eind van de door de index aangegeven periode, dan geldt:

$SA_1 = 900 + A_1 - 1000$

$SA_2 = 900 + A_1 - 1000 + A_2 - 2500$

$SA_3 = 900 + A_1 - 1000 + A_2 - 2500 + A_3 - 6000$

$SB_1 = 400 + B_1 - 1500$

$SB_2 = 400 + B_1 - 1500 + B_2 - 1000$

$SB_3 = 400 + B_1 - 1500 + B_2 - 1000 + B_3 - 5000$

ofwel

$SA_1 = A_1 - 100$

$SA_2 = A_1 + A_2 - 2600$

$SA_3 = A_1 + A_2 + A_3 - 8600$

$SB_1 = B_1 - 1100$

$SB_2 = B_1 + B_2 - 2100$

$SB_3 = B_1 + B_2 + B_3 - 7100$

Wij kunnen nu bij het construeren van het model ofwel de variabelen A_i en B_i ofwel de variabelen SA_i en SB_i ($i = 1, \ldots, 3$) als de beslissingsvariabelen gaan beschouwen. Kiest men A_i en B_i ($i = 1, \ldots, 3$) als de beslissingsvariabelen, dan kan men het model construeren als volgt:
Allereerst specificeren wij de restricties. Wij beginnen met de 9 capaciteitsrestricties (één restrictie per capaciteitssoort en per periode).

De capaciteitsrestricties inzake de machine-uren en arbeidsuren luiden als volgt:

MAC 1: $0{,}12A_1 + 0{,}1B_1 \leq 840$

MAC 2: $0{,}12A_2 + 0{,}1B_2 \leq 840$

MAC 3: $0{,}12A_3 + 0{,}1B_3 \leq 840$

LAB 1: $0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 \leq 525$

LAB 2: $0{,}05A_2 + 0{,}08B_2 \leq 450$

LAB 3: $0{,}05A_3 + 0{,}08B_3 \leq 525$

Bij bovenstaande restricties hebben wij in het rechterlid opgenomen het aantal beschikbare uren inclusief 50% overwerk.
De restricties inzake de opslagcapaciteit luiden als volgt:

STO_1: $1{,}5(A_1 - 100) + 2(B_1 - 1100) \leq 8000$

STO_2: $1{,}5(A_1 + A_2 - 2600) + 2(B_1 + B_2 - 2100) \leq 8000$

STO_3: $1{,}5(A_1 + A_2 + A_3 - 8600) + 2(B_1 + B_2 + B_3 - 7100) \leq 8000$

In iedere periode moet tenminste zoveel worden geproduceerd dat aan de vraag kan worden voldaan. Wij kunnen dit tot uitdrukking brengen door te eisen $SA_i \geq 0$ en $SB_i \geq 0$ voor $i = 1, ..., 3$. In de laatste periode moet zelfs gelden $SA_3 \geq 800$ en $SB_3 \geq 600$. De restricties $SA_3 \geq 0$ en $SB_3 \geq 0$ worden daardoor overbodig. Wij krijgen derhalve zes vraag-restricties:

DEA 1: $A_1 - 100 \geq 0$

DEA 2: $A_1 + A_2 - 2600 \geq 0$

DEA 3: $A_1 + A_2 + A_3 - 8600 \geq 800$

DEB 1: $B_1 - 1100 \geq 0$

DEB 2: $B_1 + B_2 - 2100 \geq 0$

DEB 3: $B_1 + B_2 + B_3 - 7100 \geq 600$

Wij gaan nu over tot het specificeren van de te minimeren doelstellingsfunctie. Deze luidt:

$$0{,}28(A_1-100) + 0{,}28(A_1+A_2-2600) + 0{,}28(A_1+A_2+A_3-8600) +$$
$$+ 0{,}21(B_1-1100) + 0{,}21(B_1+B_2-2100) + 0{,}21(B_1+B_2+B_3-7100) +$$
$$+ 15\,O_1 + 15\,O_2 + 15\,O_3$$

waar O_1, O_2 en O_3 voorstellen het aantal uren overwerk in de perioden 1, 2 en 3. Het aantal uren overwerk in de eerste periode wordt gegeven door:

$$O_1 = 0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 - 350$$

als de uitdrukking in het rechterlid ≥ 0 is en $O_1 = 0$ als

$$0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 - 350 < 0$$

is.

Wij nemen nu in het model op de gelijkheidsrestrictie

$$O_1 - U_1 = 0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 - 350$$

waarbij wij dus tevens O_1 en U_1 als beslissingsvariabelen introduceren. Wij stellen vanzelfsprekend voor iedere beslissingsvariabele, dus ook voor O_1 en U_1 de eis van non-negativiteit, dus $O_1 \geq 0$ en $U_1 \geq 0$.

In de optimale oplossing zal nu altijd gelden ofwel $O_1 > 0$ en $U_1 = 0$ ofwel $O_1 = 0$ en $U_1 > 0$ doch nimmer $O_1 > 0$ en $U_1 > 0$. Immers indien $O_1 > 0$ en $U_1 > 0$, dan zou men zeer gemakkelijk een betere oplossing kunnen vinden door O_1 en U_1 beide zodanig te verlagen dat juist een van beide juist gelijk aan nul wordt.

Wij moeten derhalve de volgende drie restricties nog aan het model toevoegen:

OVE 1: $O_1 - U_1 = 0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 - 350$

OVE 2: $O_2 - U_2 = 0{,}05A_2 + 0{,}08B_2 - 350$

OVE 3: $O_3 - U_3 = 0{,}05A_3 + 0{,}08B_3 - 350$

Het volledige model luidt nu als volgt [10]:
minimeer

$$0{,}84A_1 + 0{,}56A_2 + 0{,}28A_3 + 0{,}63B_1 + 0{,}42B_2 + 0{,}21B_3 + \\ + 15\ O_1 + 15\ O_2 + 15\ O_3$$

onder de voorwaarden

MAC 1: $0{,}12A_1 + 0{,}1B_1 \leq 840$

MAC 2: $0{,}12A_2 + 0{,}1B_2 \leq 840$

MAC 3: $0{,}12A_3 + 0{,}1B_3 \leq 840$

LAB 1: $0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 \leq 525$

LAB 2: $0{,}05A_2 + 0{,}08B_2 \leq 450$

LAB 3: $0{,}05A_3 + 0{,}08B_3 \leq 525$

STO 1: $1{,}5A_1 + 2B_1 \leq 10350$

STO 2: $1{,}5A_1 + 1{,}5A_2 + 2B_1 + 2B_2 \leq 16100$

STO 3: $1{,}5A_1 + 1{,}5A_2 + 1{,}5A_3 + 2B_1 + 2B_2 + 2B_3 \leq 35100$

OVE 1: $0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 - O_1 + U_1 = 350$

OVE 2: $0{,}05A_2 + 0{,}08B_2 - O_2 + U_2 = 300$

OVE 3: $0{,}05A_3 + 0{,}08B_3 - O_3 + U_3 = 350$

DEA 1: $A_1 \geq 100$

DEA 2: $A_1 + A_2 \geq 2600$

DEA 3: $A_1 + A_2 + A_3 \geq 9400$

DEB 1: $B_1 \geq 1100$

DEB 2: $B_1 + B_2 \geq 2100$

DEB 3: $B_1 + B_2 + B_3 \geq 7700$

9.3. OPLOSSEN VAN HET MODEL

Het model kan nu worden opgelost met behulp van de simplex-methode. Hiervoor kan men gebruik maken van IMOPTI of van OPTIMIZER. Voor de wijze van invoer van de gegevens verwijzen wij naar de beschrijvingen van deze beide programma's. IMOPTI draait alleen op grote computers; een beschrijving van IMOPTI is verkrijgbaar bij het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs te Utrecht. OPTIMIZER draait op verschillende microcomputers (voor de IBM-Personal Computer is de minimale configuratie 48K met disk drive en printer). De manual en het programma zijn verkrijgbaar bij SOFTKEY B.V. te Deventer.

De inputgegevens en de output van IMOPTI drukken wij hierna af op de pagina's 106 en 107. De inputgegevens en de output van OPTIMIZER zijn afgedrukt op de pagina's 108, 109 en 110.

De output van IMOPTI bestaat alleen uit het laatste simplex-tableau. De output van OPTIMIZER bestaat uit drie onderdelen. Eerst geeft OPTIMIZER van het laatste simplex-tableau het rechterlid (de waarden van de doelstellingsfunctie, van de beslissingsvariabelen en van de slack en surplus variabelen) en de z-rij (de schaduwprijzen en de reduced costs). Vervolgens geeft OPTIMIZER de resultaten van de gevoeligheidsanalyse van de coëfficiënten van de doelstellingsfunctie en tenslotte de resultaten van de gevoeligheidsanalyse van het rechterlid.

Wij bespreken nu eerst de optimale oplossing. Deze luidt:

A_1 = 100

A_2 = 5522,22

A_3 = 3777,78

B_1 = 3534,72

B_2 = 298,61

B_3 = 3866,67

Van de overige beslissingsvariabelen komen alleen U_1 en O_3 in de basis voor. U_1 = 62,22 hetgeen inhoudt dat 62,22 van de in periode 1 in de normale werktijd beschikbare uren niet worden gebruikt. O_3 = 148,22 hetgeen inhoudt dat in periode 3 gedurende 148,22 uur overwerk zal moeten plaatsvinden. O_2 en U_2 komen niet in de basis voor. In periode 2 kunnen alle in de normale werktijd beschikbare uren nuttig worden gebruikt, terwijl er in periode 2 geen overwerk behoeft plaats te vinden. Deze zelfde informatie kunnen wij ook verkrijgen door de waarden van de

```
LINEAIR-PROGRAMMERINGSPROGRAM IMOPTI


WILT U DE GEGEVENS VIA TAPE INLEZEN?TYPE JA OF NEE ?
   CM LWA+1 = 25077B, LOADER USED  41400Bnee

GEEF DE VOLGENDE SPECIFICATIE VAN HET PROBLEEM:
AANTAL BESLISSINGSVARIABELEN ?  12

TOTAAL AANTAL RESTRICTIES ?18

AANTAL =< RESTRICTIES ?  9

AANTAL = RESTRICTIES ?  3

AANTAL >= RESTRICTIES ?  6

MOET DE DOELSTELLINGSFUNKTIE GEMAXIMEERD OF GEMINIMEERD WORDEN
TYPE MAX OF MIN ?   min

GEEF DE  12  NAMEN VAN DE BESLISSINGSVARIABELEN?
a1   ,a2   ,a3   ,b1   ,b2   ,b3   ,o1   ,o2   ,o3   ,u1   ,u2   ,u3   ,

GEEF DE BIJBEHORENDE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNKTIE IN
DEZELFDE VOLGORDE?
.84,.56,.28,.63,.42,.21,15,15,15,0,0,0

GEEF ACHTEREENVOLGENS VOOR ELK VAN DE 18 RESTRICTIES EEN REGEL MET DE
NAAM VAN DE RESTRICTIE GEVOLGD DOOR DE TECHNISCHE COEFFICIENTEN EN HET
RECHTERLID;
DE  9 =< RESTRICTIES
 1?mac1/.12,0,0,.1,0,0,0,0,0,0,0,0,840

 2?mac2/0,.12,0,0,.1,0,0,0,0,0,0,0,840

 3?mac3/0,0,.12,0,0,.1,0,0,0,0,0,0,840

 4?lab1/.05,0,0,.08,0,0,0,0,0,0,0,0,525

 5?lab2/0,.05,0,0,.08,0,0,0,0,0,0,0,450

 6?lab3/0,0,.05,0,0,.08,0,0,0,0,0,0,525

 7?sto1/1.5,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,10350

 8?sto2/1.5,1.5,0,2,2,0,0,0,0,0,0,0,16100

 9?sto3/1.5,1.5,1.5,2,2,2,0,0,0,0,0,0,35100

DE  3 = RESTRICTIES
 1?ove1/.05,0,0,.08,0,0,-1,0,0,1,0,0,350

 2?ove2/0,.05,0,0,.08,0,0,-1,0,0,1,0,300

 3?ove3/0,0,.05,0,0,.08,0,0,-1,0,0,1,350

DE  6 >= RESTRICTIES
 1?dea1/1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,100

 2?dea2/1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2600

 3?dea3/1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9400

 4?deb1/0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1100

 5?deb2/0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,2100

 6?deb3/0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,7700
```

ECHTE VARIABELEN A1 A2 A3 B1 B2 B3 01 02 03
U1 U2 U3
SURPLUS VARIABELEN DEA1 DEA2 DEA3 DEB1 DEB2 DEB3
SLACK VARIABELEN MAC1 MAC2 MAC3 LAB1 LAB2 LAB3 STO1 STO2 STO3

ARTIFICIAL VARIABELEN OVE1 OVE2 OVE3
ART 1 ART 2 ART 3 ART 4 ART 5 ART 6

EINDOPLOSSING NA 14 ITERATIES
TABLEAU ZONDER DE KOLOMMEN DER ARTIFICIAL VARIABELEN

BASIS VARIABELEN — NIET-BASISVARIABELEN

BASIS VARIABELEN	O1	O2	U2	U3	STO2	DEA3
MAC1	0.00	-1.25	1.25	0.00	-.06	-.03
MAC2	0.00	1.25	-1.25	0.00	.06	.15
DEB2	0.00	0.00	0.00	0.00	1.33	2.00
LAB1	0.00	-1.00	1.00	0.00	-.05	-.03
LAB2	0.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
LAB3	0.00	0.00	0.00	0.00	.05	.08
STO1	0.00	-25.00	25.00	0.00	-1.28	-.67
DEB1	0.00	12.50	-12.50	0.00	.64	.33
STO3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.50
U1	-1.00	-1.00	1.00	0.00	-.05	-.03
DEA2	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.11	-2.67
B3	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.33	-2.00
A1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A2	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.11	-2.67
A3	0.00	0.00	0.00	0.00	1.11	1.67
B1	0.00	12.50	-12.50	0.00	.64	.33
B2	0.00	-12.50	12.50	0.00	.69	1.67
O3	0.00	0.00	0.00	-1.00	-.05	-.08
DOELF	15.00	12.38	2.63	15.00	.66	1.69

VERVOLG TABLEAU

BASIS VARIABELEN — NIET-BASISVARIABELEN

BASIS VARIABELEN	DEA1	MAC3	DEB3	WAARDE BASIS
MAC1	.06	-.28	-.03	474.53
MAC2	-.06	1.28	.13	147.47
DEB2	0.00	16.67	1.67	1733.33
LAB1	0.00	-.22	-.02	237.22
LAB2	0.00	0.00	0.00	150.00
LAB3	0.00	.22	.10	26.78
STO1	.25	-5.56	-.56	3130.56
DEB1	.63	2.78	.28	2434.72
STO3	0.00	0.00	2.00	5600.00
U1	0.00	-.22	-.02	62.22
DEA2	0.00	-22.22	-2.22	3022.22
B3	0.00	-16.67	-2.67	3866.67
A1	-1.00	0.00	0.00	100.00
A2	1.00	-22.22	-2.22	5522.22
A3	0.00	22.22	2.22	3777.78
B1	.63	2.78	.28	3534.72
B2	-.63	13.89	1.39	298.61
O3	0.00	-.22	-.10	148.22
DOELF	.15	5.47	1.96	-9621.85

SALDO= -9621.847222

PROJECT NAME: LINPRO

PROBLEM STATEMENT

OBJECTIVE

	A1	A2	A3	B1	B2	B3	O1	O2	O3	U1	U2	U3	CONSTANT
GOAL	.84	.56	.28	.63	.42	.21	15	15	15	Ø	Ø	Ø	Ø

CONSTRAINTS

	A1	A2	A3	B1	B2	B3	O1	O2	O3	U1	U2	U3	RELATION	VALUE
MAC1	.12	Ø	Ø	.1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	840
MAC2	Ø	.12	Ø	Ø	.1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	840
MAC3	Ø	Ø	.12	Ø	Ø	.1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	840
LAB1	.05	Ø	Ø	.08	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	525
LAB2	Ø	.05	Ø	Ø	.08	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	450
LAB3	Ø	Ø	.05	Ø	Ø	.08	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	525
STO1	1.5	Ø	Ø	2	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	10350
STO2	1.5	1.5	Ø	2	2	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	16100
STO3	1.5	1.5	1.5	2	2	2	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	LE	35100
OVE1	.05	Ø	Ø	.08	Ø	Ø	-1	Ø	Ø	1	Ø	Ø	EQ	350
OVE2	Ø	.05	Ø	Ø	.08	Ø	Ø	-1	Ø	Ø	1	Ø	EQ	300
OVE3	Ø	Ø	.05	Ø	Ø	.08	Ø	Ø	-1	Ø	Ø	1	EQ	350

```
DEA1          1          0          0          0          0
      0       0          0          0          0          0
      0       GE         100
DEA2          1          1          0          0          0
      0       0          0          0          0          0
      0       GE         2600
DEA3          1          1          1          0          0
      0       0          0          0          0          0
      0       GE         9400
DEB1          0          0          0          1          0
      0       0          0          0          0          0
      0       GE         1100
DEB2          0          0          0          1          1
      0       0          0          0          0          0
      0       GE         2100
DEB3          0          0          0          1          1
      1       0          0          0          0          0
      0       GE         7700
```

PROBLEM SOLUTION

All items not listed below have value 0.

Type of optimization: MINIMIZE
OPTIMAL SOLUTION: GOAL= 9621.848

DECISION VARIABLE	OPTIMAL VALUE
A1	99.99988
A2	5522.223
A3	3777.777
B1	3534.722
B2	298.6109
B3	3866.667
O3	148.2223
U1	62.22226

SLACK AND SURPLUS IN CONSTRAINTS

TYPE	RESOURCE	VALUE
SLACK	MAC1	474.5278
SLACK	MAC2	147.4721
SLACK	LAB1	237.2223
SLACK	LAB2	150
SLACK	LAB3	26.77776
SLACK	STO1	3130.557
SLACK	STO3	5600

SHADOW PRICES FOR CONSTRAINTS

RESOURCE	VALUE
MAC3	-5.472223
STO2	-.6636111
OVE2	-2.625001
OVE3	-15
DEA1	-.14875
DEA3	-1.686667
DEB3	-1.957222

REDUCED COSTS FOR DECISON VARIABLES

VARIABLE	COST
O1	15
O2	12.375
U2	2.625001
U3	15

RANGES OF OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS

VARIABLE	LOWER BOUND	PRESENT VALUE	UPPER BOUND
.69125		.84	UNBOUNDED
.31375		.56	.70875
-880803.9		.28	.5262501
.42		.63	.8679999
.1820001		.42	.6300001
-.1183334		.21	1761609
9.536743E-07		15	UNBOUNDED
2.625001		15	UNBOUNDED
2.016303		15	5.637148E+07
-12.375		0	2.625001
-2.625001		0	UNBOUNDED
-15		0	UNBOUNDED

RANGE OF RESOURCES

RESOURCE	LOWER BOUND	PRESENT VALUE	UPPER BOUND
MAC1	365.4725	840	UNBOUNDED
MAC2	692.5275	840	UNBOUNDED
MAC3	818.5003	840	976.0001
LAB1	287.778	525	UNBOUNDED
LAB2	300	450	UNBOUNDED
LAB3	498.2222	525	UNBOUNDED
STO1	7219.446	10350	UNBOUNDED
STO2	15670.01	16100	17317.39
STO3	29500	35100	UNBOUNDED
OVE1	287.778	350	UNBOUNDED
OVE2	276.1115	300	417.978
OVE3	UNBOUNDED	350	498.2222
DEA1	0	100	3995.557
DEA2	UNBOUNDED	2600	5622.223
DEA3	8266.666	9400	9579.164
DEB1	UNBOUNDED	1100	3534.724
DEB2	UNBOUNDED	2100	3833.334
DEB3	6340	7700	7914.997

spelingsvariabelen LAB 1, LAB 2 en LAB 3 te beschouwen. Deze komen alle in de basis voor, hetgeen inhoudt dat deze restricties niet bindend zijn. LAB 1 = 237,22; in het rechterlid van restrictie LAB 1 stond 525, zodat het aantal nuttig gebruikte uren in periode 1 gelijk is aan 525 - 237,22 = 287,78. In de normale werktijd zijn dus nog 350 - 287,78 = 62,22 uren niet gebruikt, hetgeen wij ook reeds weten uit U_1 = 62,22.

Eveneens niet bindend zijn de restricties MAC 1, MAC 2, STO 1 en STO 3 (de bijbehorende spelingsvariabelen komen immers in de basis voor). In periode 1 zijn nog 474,53 machine-uren beschikbaar, terwijl aan het eind van periode 1 nog 3130,56 m^2 opslagruimte beschikbaar is.

Wel bindend zijn de restricties STO 2 en MAC 3. Aan het eind van periode 2 is de opslagcapaciteit volledig benut. Zou er één m^2 extra opslagruimte beschikbaar zijn, dan zouden de kosten met ƒ 0,66 dalen van ƒ 9621,85 tot ƒ 9621,19.

9.4. GEVOELIGHEIDSANALYSE VAN HET RECHTERLID

Stel nu, dat de onderneming de mogelijkheden om voor periode 2 magazijnruimte bij te huren wil verkennen en dat de volgende magazijnen te huur worden aangeboden:

Magazijn	Oppervlakte in m²	Huurprijs voor één periode
A	600	ƒ 300,--
B	900	ƒ 540,--
C	1800	ƒ 990,--

Is het verstandig één of meer van deze magazijnen te huren? Zo ja, welke?
Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten wij weten binnen welke grenzen de schaduwprijs van ƒ 0,66 per m² geldig blijft. In de output van OPTIMIZER kunnen wij deze grenzen direct aflezen onder het kopje "RANGES OF RESOURCES". Wij vinden daar bij STO2 dat de schaduwprijs geldig blijft zolang $15670,01 < b_8 < 17317,39$, waarbij b_8 de coëfficiënt in het rechterlid van restrictie STO2 voorstelt. De huidige waarde van b_8 is 16100, zodat de schaduwprijs geldig blijft zolang $-429,99 < \Delta b_8 < 1217,39$.

Als wij alleen beschikken over de output van IMOPTI, dan moeten wij zelf een gevoeligheidsanalyse van het rechterlid van restrictie STO2 uitvoeren met behulp van de gegevens van het laatste simplex-tableau. Wij vinden dan, dat de schaduwprijs van 66 cent per m² geldig blijft zolang geldt:

$$\max\left(\frac{-147,47}{0,06}, \frac{-1733,33}{1,33}, \frac{-26,78}{0,05}, \frac{-2434,72}{0,64}, \frac{-3777,78}{1,11}, \frac{-3534,72}{0,64}, \frac{-298,61}{0,69}\right) < \Delta b_8 < \min\left(\frac{-474,53}{-0,06}, \frac{-237,22}{-0,05}, \frac{-3130,56}{-1,28}, \frac{-62,22}{-0,05}, \frac{-3022,22}{-1,11}, \frac{-3866,67}{-1,33}, \frac{-5522,22}{-1,11}, \frac{-148,22}{-0,05}\right)$$

ofwel

$$-432,77 < \Delta b_8 < 1244,4$$

Dit interval wijkt enigszins af van het door OPTIMIZER gegeven interval. De afwijking wordt veroorzaakt door afrondingsfouten (de met behulp van IMOPTI berekende bovengrens van 1244,4 is berekend uit $\frac{-\ 62,22}{-\ \ 0,05}$; met name doordat het getal in de noemer is afgerond op slechts één significante decimaal kunnen grote afrondingsfouten optreden).

Wij concluderen dus, dat indien men magazijn A of B huurt men kan rekenen op een kostenverlaging van 600 respectievelijk 900 maal 66 cent. Over de kostenverlaging die kan worden bereikt als men magazijn C of een combinatie van meer dan één magazijn huurt kunnen wij geen uitspraak doen. De netto besparingen bij het huren van magazijn A of B kunnen wij nu als volgt berekenen:

	Magazijn A	Magazijn B
Kostenvermindering	600 * 0,66 = 396	900 * 0,66 = 594
Meerkosten door magazijnhuur	300	540
Netto besparing	96	54

Wij concluderen dus, dat men indien men gedwongen zou zijn te kiezen tussen A en B moet kiezen voor het huren van magazijn A. Mogelijk levert het huren van A èn B of van magazijn C of van een andere combinatie van meer dan één magazijn een grotere netto besparing op dan ƒ 96,-. Als wij dit willen nagaan zullen wij het probleem nog een of meer keer met de simplex-methode moeten oplossen voor andere waarden van b_8.

9.5. GEVOELIGHEIDSANALYSE VAN DE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNCTIE

In de optimale oplossing wordt de piek in de vraag naar beide produkten voor een deel opgevangen door overwerk (in periode 3) en voor een ander deel door in het voren (in periode 2 en in periode 1) te produceren. Blijkbaar is de som van overwerkkosten en voorraadkosten op die manier het kleinst.

Stel nu eens, dat de overwerkkosten in periode 3 niet ƒ 15,- maar slechts ƒ 5,- per uur bedragen, terwijl alle andere gegevens gelijk blijven. Moet men dan in periode 3 meer gaan overwerken? Om deze vraag te beantwoorden moet men weten binnen welke grenzen c_9 (dat is de coëfficiënt van O_3 in de doelstellingsfunctie) kan variëren zonder dat de optimale oplossing verandert. In de output van OPTIMIZER vinden wij direct het antwoord. De gezochte grenzen zijn: $2.016303 < c_9 < 5.637148 \times 10^7$. De benedengrens is dus afgerond ƒ 2,02 en de bovengrens ruim ƒ 56 miljoen per uur. Deze bovengrens is dus praktisch oneindig groot.

Beschikken wij alleen over de output van IMOPTI, dan moeten wij zelf de gevoeligheidsanalyse uitvoeren met behulp van de gegevens uit het laatste simplex-tableau. Wij vinden dan[11]):

$$\max\left(\frac{15}{-1}, \frac{0,66}{-0,05}, \frac{1,69}{-0,08}, \frac{5,47}{-0,22}, \frac{1,96}{-0,10}\right) < \Delta c_9 <$$

$$\min\left(\frac{15}{0}, \frac{12,38}{0}, \frac{2,63}{0}, \frac{0,15}{0}\right)$$

ofwel $-13,2 < \Delta c_9 < \infty$

ofwel $1,8 < c_9 < \infty$

Door afrondingsfouten verschilt dit interval enigszins van het door OPTIMIZER gegeven interval.

De conclusie is echter duidelijk: als de overwerkkosten in de derde periode ƒ 5,- per uur bedragen in plaats van ƒ 15,- per uur blijft de optimale oplossing ongewijzigd.

9.6. VRAAGSTUKKEN

9-1. Caravanfabriek Van der Woude B.V. heeft op een gegeven moment 200 werknemers in de direct productieve afdelingen in dienst. De vraag naar caravans vertoont een sterk seizoenspatroon. Voor de komende drie planningsperioden verwacht men de volgende vraag:

Planningsperiode	Vraag (aantal caravans)
1	600
2	800
3	2000

Voor het makan van één caravan zijn 80 manuren nodig. Na aftrek van snipperdagen, ziekte, vakantie en dergelijke is het aantal per man, per periode beschikbare uren:

Periode	Aantal uren beschikbaar per man
1	580
2	580
3	500

De directe loonkosten per man bedragen ƒ 10.000,- per periode. Het is mogelijk het aantal direct-produktieve personeelsleden te veranderen aan het begin van iedere periode. Een vermindering van het aantal direct produktieve personeelsleden veroorzaakt afvloeiingskosten van ƒ 15.000,- per af te vloeien personeelslid. Een vergroting van het aantal personeelsleden veroorzaakt wervingskosten van ƒ 1000,- per te werven personeelslid. Van der Woude B.V. kan een ongelimiteerd aantal caravans opslaan. De voorraadkosten bedragen ƒ 180,- per caravan per periode. De beginvoorraad is 200 caravans. Aan het eind van de derde periode wenst men tenminste een voorraad van 200 caravans te hebben.
De produktieplanner van van der Woude B.V. wenst een zodanig produktieplan op te stellen, dat de som van loonkosten, voorraadkosten, afvloeiingskosten en wervingskosten zo klein mogelijk is.

a. Formuleer dit probleem als een LP-probleem.
b. Los het probleem op met gebruikmaking van IMOPTI of van OPTIMIZER.

9-2. Het probleem van Van der Woude B.V. is in vraagstuk 9-1. sterk vereenvoudigd weergegeven. In werkelijkheid produceert van der Woude B.V. naast caravans namelijk ook directieketen. Voor de komende 3 perioden is de vraag naar caravans en directieketen:

periode	caravans	directieketen
1	600	725
2	800	750
3	2000	800

Voor het maken van een directiekeet zijn 60 manuren nodig (voor een caravan 80 uren).
Aan het begin van iedere periode kunnen personeelsleden worden ontslagen of aangenomen. Ontslag van één personeelslid kost ƒ 15.000,-, het werven van een personeelslid kost ƒ 1000,-. De directe loonkosten bedragen ƒ 10.000,- per personeelslid per periode.
Het is mogelijk de directe personeelsleden te laten overwerken. Het maximum daarbij is 20% van het in een bepaalde periode in de normale werktijd beschikbare aantal manuren. De kosten van overwerk bedragen ƒ 30,- per uur.
Het aantal werkuren per periode gedurende normale werktijd is gegeven in onderstaande tabel:

periode	aantal uren beschikbaar per man
1	580
2	580
3	500

Het aantal personeelsleden is thans 267. Gezien de in de fabriek beschikbare ruimte en de aanwezige gereedschappen en machines kunnen maximaal 300 personeelsleden tegelijkertijd in de fabriek werken. Teneinde in de zomermaanden een zo groot mogelijke produktie te kunnen bereiken is in voorgaande jaren gedurende enkele maanden in 2-ploegendienst gewerkt. De kosten van de ploegentoeslag bedragen 25% van de normale loonkosten. Uit ervaring weet men, dat 2/3 deel van het aantal personeelsleden niet bereid is in ploegendienst te werken. Personeelsleden die gedurende een bepaalde maand in ploegendienst werken mogen geen overwerk verrichten.
De voorraadkosten bedragen ƒ 180,- per periode voor een caravan en ƒ 160,- per periode voor een directiekeet. De beginvoorraad is 200 caravans en 100 directieketen. Men wenst aan het eind van periode 3 tenminste 200 caravans en 100 directieketen in voorraad te hebben.

De produktieplanner van van der Woude B.V. staat nu voor de taak een produktieplan te ontwerpen dat zodanig is dat 1^e steeds aan de vraag kan worden voldaan en 2^e de som van normale loonkosten, overwerkkosten, ploegentoeslag, afvloeiings- en wervingskosten en voorraadkosten zo klein mogelijk is.

a. Geef aan welke beslissingsvariabelen u zou willen gebruiken in het voor dit probleem op te stellen LP-model. Geef iedere beslissingsvariabele een naam.

b. Schrijf de doelstellingsfunctie van het model volledig uit.

c. Geef aan welke restricties u bij dit LP-model zou willen onderscheiden. Geef iedere restrictie een naam. Omschrijf bij iedere restrictie of groep van restricties de betekenis van de restrictie(s) met enkele woorden.

d. Schrijf de restricties volledig uit.

9-3. Neduco B.V. is een producent van luierbroekjes. Deze luierbroekjes worden afgezet in vier geografische gebieden (Benelux, Duitsland, Frankrijk en Italië).
De vraag per periode in deze vier gebieden is voor de komende drie perioden (uitgedrukt in 1000 dozen):

	periode		
	1	2	3
Benelux	200	240	280
Duitsland	300	320	340
Frankrijk	120	140	180
Italië	80	80	90

Neduco beschikt over fabrieken in Nederland en in Duitsland. In beide fabrieken wordt per periode gedurende 160 uur gewerkt in normale werktijd; in periode 3 is in de Duitse fabriek echter slechts 100 uur beschikbaar in verband met het begin van de bedrijfsvakantie. In de Nederlandse fabriek produceert men 2000 dozen per uur; in de Duitse fabriek is dit 3000 dozen per uur. In beide fabrieken is overwerk mogelijk tot ten hoogste 25 procent van de normale werktijd. De kosten van overwerk bedragen voor de Nederlandse fabriek *f* 2000,-- per uur, voor de Duitse fabriek *f* 2800,-- per uur.
In Frankrijk en Italië beschikt Neduco over een depot, in Nederland en in Duitsland is er een magazijn voor gereed produkt op het fabrieksterrein. De in een bepaalde periode geproduceerde hoeveelheden worden nog gedurende dezelfde periode naar één van de depots òf naar één van de fabrieksmagazijnen gebracht. De opslagruimte in de depots en in de fabrieksmagazijnen bedraagt (in 1000 dozen):

Nederland	500
Duitsland	600
Frankrijk	200
Italië	100

De opslagkosten per periode zijn gegeven in onderstaande tabel (bedragen per 1000 dozen):

Nederland	*f* 160,--
Duitsland	*f* 205,--
Frankrijk	*f* 240,--
Italië	*f* 135,--

De transportkosten (in guldens per 1000 dozen) zijn gegeven in onderstaande tabel:

	Van:	Nederland	Duitsland
Naar:	Nederland	0	1200,--
	Duitsland	1270,--	0
	Frankrijk	1600,--	1500,--
	Italië	4000,--	3400,--

De beginvoorraad aan het begin van periode 1 en de minimumvoorraad (dat is de voorraad die aan het einde van iedere periode in ieder depot c.q. magazijn aanwezig moet zijn in verband met onvoorspelbare vraagfluctuaties) zijn (in 1000 dozen):

	beginvoorraad	minimum voorraad
Nederland	140	120
Duitsland	150	150
Frankrijk	100	80
Italië	60	50

De produktieplanner van Neduco B.V. heeft tot taak een produktie- en transportplan op te stellen zó, dat de voorraad in geen van de depots of magazijnen ooit beneden de minimum voorraad daalt, en zó dat de som van voorraadkosten, transportkosten en overwerkkosten zo klein mogelijk is.

a. Geef aan welke beslissingsvariabelen u zou willen gebruiken in het voor dit probleem op te stellen LP-model. Geef iedere beslissingsvariabele een naam.
b. Schrijf de doelstellingsfunctie van het model volledig uit.
c. Geef aan welke soorten restricties u in dit model wilt opnemen. Geef iedere restrictie een naam.
d. Schrijf de restricties volledig uit.

10. HET OPSTELLEN VAN EEN STRUCTUURPLAN VOOR EEN GEMEENTE MET BEHULP VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

10.1. INLEIDING

In het voorgaande hoofdstuk beschreven wij een toepassing van lineaire programmering op een probleem van operationele aard. In dit hoofdstuk beschrijven wij een toepassing van lineaire programmering op een probleem van strategische aard, nl. het opstellen van een structuurplan door een gemeente. Wij beschrijven deze toepassing aan de hand van een voorbeeld [12]).

10.2. PROBLEEMSTELLING

Gegeven is onderstaande plattegrond van een plattelandsgemeente:

	1	2	3	4
opp. in ha.:	80	120	110	60

Zone 1 en zone 4 zijn weide-gebieden; in deze zones is het gehele grondoppervlak in principe te gebruiken voor woningbouw. Zone 2 bestaat uit een zeer aantrekkelijk bos- en heidegebied; woningbouw in zone 2 is wel mogelijk, maar zal dan ten koste gaan van een waardevol natuurgebied. Men wenst dit natuurgebied zo veel mogelijk te sparen. Zone 3 is de bestaande dorpskern. Van zone 3 is thans 70 ha. bebouwd met woningen en centrumvoorzieningen.

Men wil in deze gemeente voor 5000 gezinnen woningen bouwen. Er worden twee typen woningen onderscheiden, nl. gesubsidieerde woningen en zgn. vrije-sector woningen. De vraag is nu het aantal te bouwen woningen per type en per zone te bepalen. De volgende gegevens zijn verder nog bekend:

- Een gesubsidieerde woning vraagt een grond-oppervlak van $400m^2$, een vrije sector woning $800m^2$.
- in zone 3 bevinden zich 400 enigszins vervallen woningen, die eventueel voor sloop in aanmerking kunnen komen. Per te slopen woning komt dan eventueel $1000m^2$ grondoppervlak vrij. Voor iedere te slopen woning moet uiteraard wel een nieuwe woning worden gebouwd, eventueel in een andere zone.
- In zone 3 bevinden zich thans de centrumvoorzieningen die zijn afgestemd op het bestaande aantal woningen. Ieder nieuw gezin, dat zich in de gemeente komt vestigen heeft centrumvoorzieningen nodig. Deze centrumvoorzieningen zullen alle in zone 3 moeten worden gerealiseerd. Per gezin is daarvoor $50m^2$ grondoppervlak nodig.
- Voor het totaal aantal nieuw te bouwen woningen moet 2/3 deel in de gesubsidieerde sector en 1/3 deel in de vrije sector worden gebouwd.
- Zowel om redenen van architectonische als van sociologische aard wenst men in de zones 1, 2 en 4 tenminste 25% gesubsidieerde woningen en tevens tenminste 25% vrije-sector woningen te bouwen.
- De "wellfare-coefficients" zijn als volgt [13]):

zone	gesub. woning	vrije-sector woning
1	1,0	4,9
2	2,4	6,6
3	4,5	8,5
4	3,1	7,0

Afbraak van woningen: -80,0 per woning.
- Men wenst een zodanig plan te ontwerpen, dat enerzijds de waarde van de wellfare-function zo groot mogelijk is en anderzijds een zo groot mogelijk deel van het natuurgebied in zone 2 wordt gespaard.

10.3. DE FORMULERING VAN HET MODEL

Wij onderscheiden 9 beslissingsvariabelen, nl.

D_{ij} = het aantal te bouwen woningen van type j in zone i.
j = 1 slaat op een gesubsidieerde woning, j = 2 op een vrije sector woning. Door beide woningtypen in elk van de vier zones te bouwen, hebben wij hiermee 8 beslissingsvariabelen gedefinieerd.

DM = het aantal in zone 3 af te breken woningen.

Wij formuleren nu eerst de doelstellingsfunctie. Wij willen maximeren

$$D_{11} + 4{,}9D_{12} + 2{,}4D_{21} + 6{,}6D_{22} + 4{,}5D_{31} + 8{,}5D_{32} + 3{,}1D_{41} + 7{,}0D_{42} - 80DM$$

Wij formuleren nu de restricties.
Voor iedere zone geldt een restrictie ten aanzien van het maximale grondgebruik. Voor de zone 1 is dat:

$$4D_{11} + 8D_{12} \leq 8000$$

waarbij als eenheid van oppervlakte de are is gekozen.
De vier restricties ten aanzien van het grondgebruik luiden

ZON 1: $4D_{11} + 8D_{12} \leq 8000$

ZON 2: $4D_{21} + 8D_{22} \leq 12000$

ZON 3: $4D_{31} + 8D_{32} - 10DM \leq 1500$

ZON 4: $4D_{41} + 8D_{42} \leq 6000$

In zone 3 is in totaal 11000 are beschikbaar. Dit beschikbare oppervlak moet worden verminderd met het reeds bebouwde gedeelte (7000 are) en met de grond, die voor voorzieningen nodig is (5000 * 0,5 = 2500 are). In het rechterlid van restrictie ZON 3 staat daarom 11000 - 7000 - 2500 = 1500 are).

In zone 3 mogen maximaal 400 woningen worden gesloopt.
Dit geven wij aan in de volgende restrictie:

MDEM: $DM \leq 400$

Er moeten in totaal 5000 woningen worden gebouwd. Dit aantal moet worden vermeerderd met het aantal te slopen woningen:

TDWE: $D_{11} + D_{12} + D_{21} + D_{22} + D_{31} + D_{32} + D_{41} + D_{42} - DM = 5000$

Een derde deel van het aantal te bouwen woningen moet in de vrije sector worden gerealiseerd en tweederde deel in de gesubsidieerde sector:

DWTY: $D_{11} + D_{21} + D_{31} + D_{41} = 2(D_{12} + D_{22} + D_{32} + D_{42})$

In zone 1 moet van het totaal aantal te bouwen woningen tenminste 25% in de gesubsidieerde sector worden gebouwd:

ARC 1: $D_{11} \geq 0,25(D_{11} + D_{12})$

De vijf andere restricties van dit type zijn:

ARC 2: $D_{21} \geq 0,25(D_{21} + D_{22})$

ARC 3: $D_{41} \geq 0,25(D_{41} + D_{42})$

ARC 4: $D_{12} \geq 0,25(D_{11} + D_{12})$

ARC 5: $D_{22} \geq 0,25(D_{21} + D_{22})$

ARC 6: $D_{42} \geq 0,25(D_{41} + D_{42})$

Het volledige model luidt als volgt:
maximeer

$$D_{11} + 4,9D_{12} + 2,4D_{21} + 6,6D_{22} + 4,5D_{31} + 8,5D_{32} + 3,1D_{41} + 7,0D_{42} - 80DM$$

onder de voorwaarden

ZON 1: $4D_{11} + 8D_{12} \leq 8000$

ZON 2: $4D_{21} + 8D_{22} \leq 12000$

ZON 3: $4D_{31} + 8D_{32} - 10DM \leq 1500$

ZON 4: $4D_{41} + 8D_{42} \leq 6000$

MDEM : $DM \leq 400$

ARC 1: $-0,75D_{11} + 0,25D_{12} \leq 0$

ARC 2: $-0,75D_{21} + 0,25D_{22} \leq 0$

ARC 3: $-0,75D_{41} + 0,25D_{42} \leq 0$

ARC 4: $0,25D_{11} - 0,75D_{12} \leq 0$

ARC 5: $0,25D_{21} - 0,75D_{22} \leq 0$

ARC 6: $0,25D_{41} - 0,75D_{42} \leq 0$

TDWE : $D_{11} + D_{12} + D_{21} + D_{22} + D_{31} + D_{32} + D_{41} + D_{42} - DM = 5000$

DWTY : $D_{11} - 2D_{12} + D_{21} - 2D_{22} + D_{31} - 2D_{32} + D_{41} - 2D_{42} = 0$

10.4. DE OPLOSSING VAN HET MODEL

Volgens de in paragraaf 10.2. gegeven probleemstelling wenst men enerzijds de welfare-function te maximeren en anderzijds een zo groot mogelijk natuurgebied in zone 2 te sparen. Dit is dus een probleem met twee doelstellingen. Noemen wij de waarde van de welfare-function z en het aantal te sparen are natuurgebied in zone 2 y, dan zijn wij dus met name geïnteresseerd in z als functie van y.
Wij lossen het probleem daarom een aantal malen op voor verschillende waarden van y, namelijk

y = 0, 500, 1000, 2000 en 2650 are

In het rechterlid van restrictie 2 staan dan achtereenvolgens de getallen 12000, 11500, 11000, 10000 en 9350.
De input en de output van IMOPTI voor deze 5 alternatieven is gegeven op de pagina's 109-118.

In tabel 10.1. hebben wij de waarden van y, z en u_2 voor de vijf alternatieven samengevat. Met u_2 is bedoeld de schaduwprijs van het natuurgebied in zone 2 uitgedrukt in eenheden van de welfare-function per are. Deze schaduwprijs vinden wij in de rij van de doelstellingsfunctie in de kolom van spelingsvariabele ZON 2.

Alternatief	y	z	u_2
A	0	18872,50	0,30
B	500	18725,00	0,30
C	1000	16115,00	15,07
D	2000	942,86	15,20
E	2650	-8939,46	15,20

- Tabel 10.1. Aantal are te sparen natuurgebied in zone 2 (y), waarde van de welfare-function (z) en schaduwprijs van één are natuurgebied in eenheden van de welfare-function (u_2) -

In tabel 10.2. geven wij een overzicht van de basisvariabelen behorend bij de vijf alternatieven.

```
LINEAIR-PROGRAMMERINGSPROGRAM IMOPTI


WILT U DE GEGEVENS VIA TAPE INLEZEN?TYPE JA OF NEE ?
   CM LWA+1 = 25077B, LOADER USED  41400BNEE

GEEF DE VOLGENDE SPECIFICATIE VAN HET PROBLEEM:
AANTAL BESLISSINGSVARIABELEN ?  9

TOTAAL AANTAL RESTRICTIES ?13

AANTAL =< RESTRICTIES ?  11

AANTAL = RESTRICTIES ?  2

AANTAL >= RESTRICTIES ?  0

MOET DE DOELSTELLINGSFUNKTIE GEMAXIMEERD OF GEMINIMEERD WORDEN
TYPE MAX OF MIN ?   MAX

GEEF DE   9  NAMEN VAN DE BESLISSINGSVARIABELEN?
D11 ,D12 ,D21 ,D22 ,D31 ,D32 ,D41 ,D42 ,DM

GEEF DE BIJBEHORENDE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNKTIE IN
DEZELFDE VOLGORDE?
1,4.9,2.4,6.6,4.5,8.5,3.1,7,-80

GEEF ACHTEREENVOLGENS VOOR ELK VAN DE 13 RESTRICTIES EEN REGEL MET DE
NAAM VAN DE RESTRICTIE GEVOLGD DOOR DE TECHNISCHE COEFFICIENTEN EN HET
RECHTERLID;
DE 11 =< RESTRICTIES
 1?ZON1/4,8,0,0,0,0,0,0,0,8000

 2?ZON2/0,0,4,8,0,0,0,0,0,12000

 3?ZON3/0,0,0,0,4,8,0,0,-10,1500

 4?ZON4/0,0,0,0,0,0,4,8,0,6000

 5?MDEM/0,0,0,0,0,0,0,0,1,400

 6?ARC1/-.75,.25,0,0,0,0,0,0,0,0

 7?ARC2/0,0,-.75,.25,0,0,0,0,0,0

 8?ARC3/0,0,0,0,0,0,-.75,.25,0,0

 9?ARC4/.25,-.75,0,0,0,0,0,0,0,0

10?ARC5/0,0,.25,-.75,0,0,0,0,0,0

11?ARC6/0,0,0,0,0,0,.25,-.75,0,0

DE  2 = RESTRICTIES
 1?TDWE/1,1,1,1,1,1,1,1,-1,5000

 2?DWTY/1,-2,1,-2,1,-2,1,-2,0,0
```

ECHTE VARIABELEN D11 D12 D21 D22 D31 D32 D41 D42 DM

SLACK VARIABELEN ZON1 ZON2 ZON3 ZON4 MDEM ARC1 ARC2 ARC3 ARC4
ARC5 ARC6

ARTIFICIAL VARIABELEN TDWE DWTY

EINDOPLOSSING NA 13 ITERATIES
TABLEAU ZONDER DE KOLOMMEN DER ARTIFICIAL VARIABELEN

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN					
	ZON4	ARC6	ZON2	D32	ZON3	ARC5
D21	0.00	0.00	.15	0.00	0.00	1.60
ARC2	0.00	0.00	.10	0.00	0.00	1.40
D31	0.00	0.00	0.00	2.00	.25	0.00
ZON1	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00
MDEM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ARC1	-.10	-1.40	-.10	-1.75	-.19	-1.40
D22	0.00	0.00	.05	0.00	0.00	-.80
D42	.05	-.80	0.00	0.00	0.00	0.00
D11	-.15	-1.60	-.15	-2.00	-.25	-1.60
D41	.15	1.60	0.00	0.00	0.00	0.00
ARC4	0.00	1.00	0.00	1.25	.06	1.00
ARC3	.10	1.40	0.00	0.00	0.00	0.00
D12	-.05	.80	-.05	1.00	0.00	.80
DOELF	.42	1.68	.30	3.40	.87	.88

VERVOLG TABLEAU

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN	
	DM	WAARDE BASIS
D21	0.00	1800.00
ARC2	0.00	1200.00
D31	-2.50	375.00
ZON1	-4.67	833.33
MDEM	1.00	400.00
ARC1	1.46	2.08
D22	0.00	600.00
D42	0.00	300.00
D11	1.83	258.33
D41	0.00	900.00
ARC4	-.71	510.42
ARC3	0.00	600.00
D12	-.33	766.67
DOELF	68.95	18872.50

SALDO= 18872.500000

```
     STOP
COMMAND- IMOPTI


LINEAIR-PROGRAMMERINGSPROGRAM IMOPTI


WILT U DE GEGEVENS VIA TAPE INLEZEN?TYPE JA OF NEE ?
   CM LWA+1 = 25077B, LOADER USED  41400BNEE

GEEF DE VOLGENDE SPECIFICATIE VAN HET PROBLEEM:
AANTAL BESLISSINGSVARIABELEN ?  9

TOTAAL AANTAL RESTRICTIES ?13

AANTAL =< RESTRICTIES ?  11

AANTAL = RESTRICTIES ?  2

AANTAL >= RESTRICTIES ?  0

MOET DE DOELSTELLINGSFUNKTIE GEMAXIMEERD OF GEMINIMEERD WORDEN
TYPE MAX OF MIN ?   MAX

GEEF DE   9  NAMEN VAN DE BESLISSINGSVARIABELEN?
D11 ,D12 ,D21 ,D22 ,D31 ,D32 ,D41 ,D42 ,DM

GEEF DE BIJBEHORENDE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNKTIE IN
DEZELFDE VOLGORDE?
1,4.9,2.4,6.6,4.5,8.5,3.1,7,-80

GEEF ACHTEREENVOLGENS VOOR ELK VAN DE 13 RESTRICTIES EEN REGEL MET DE
NAAM VAN DE RESTRICTIE GEVOLGD DOOR DE TECHNISCHE COEFFICIENTEN EN HET
RECHTERLID;
DE 11 =< RESTRICTIES
 1?ZON1/4,8,0,0,0,0,0,0,0,8000

 2?ZON2/0,0,4,8,0,0,0,0,0,11500

 3?ZON3/0,0,0,0,4,8,0,0,-10,1500

 4?ZOM4/0,0,0,0,0,0,4,8,0,6000

 5?MDEM/0,0,0,0,0,0,0,0,1,400

 6?ARC1/-.75,.25,0,0,0,0,0,0,0,0

 7?ARC2/0,0,-.75,.25,0,0,0,0,0,0

 8?ARC3/0,0,0,0,0,0,-.75,.25,0,0

 9?ARC4/.25,-.75,0,0,0,0,0,0,0,0

10?ARC5/0,0,.25,-.75,0,0,0,0,0,0

11?ARC6/0,0,0,0,0,0,.25,-.75,0,0

DE  2 = RESTRICTIES
 1?TDWE/1,1,1,1,1,1,1,1,-1,5000

 2?DWTY/1,-2,1,-2,1,-2,1,-2,0,0
```

ECHTE VARIABELEN D11 D12 D21 D22 D31 D32 D41 D42 DM

SLACK VARIABELEN ZON1 ZON2 ZON3 ZOM4 MDEM ARC1 ARC2 ARC3 ARC4 ARC5 ARC6

ARTIFICIAL VARIABELEN TDWE DWTY

EINDOPLOSSING NA 13 ITERATIES
TABLEAU ZONDER DE KOLOMMEN DER ARTIFICIAL VARIABELEN

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN					
	ZOM4	ARC6	ZON2	D32	ZON3	ARC5
D21	0.00	0.00	.15	0.00	0.00	1.60
ARC2	0.00	0.00	.10	0.00	0.00	1.40
D31	0.00	0.00	0.00	2.00	.25	0.00
ZON1	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00
MDEM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ARC1	-.10	-1.40	-.10	-1.75	-.19	-1.40
D22	0.00	0.00	.05	0.00	0.00	-.80
D42	.05	-.80	0.00	0.00	0.00	0.00
D11	-.15	-1.60	-.15	-2.00	-.25	-1.60
D41	.15	1.60	0.00	0.00	0.00	0.00
ARC4	0.00	1.00	0.00	1.25	.06	1.00
ARC3	.10	1.40	0.00	0.00	0.00	0.00
D12	-.05	.80	-.05	1.00	0.00	.80
DOELF	.42	1.68	.30	3.40	.87	.88

VERVOLG TABLEAU

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN	
	DM	WAARDE BASIS
D21	0.00	1725.00
ARC2	0.00	1150.00
D31	-2.50	375.00
ZON1	-4.67	333.33
MDEM	1.00	400.00
ARC1	1.46	52.08
D22	0.00	575.00
D42	0.00	300.00
D11	1.83	333.33
D41	0.00	900.00
ARC4	-.71	510.42
ARC3	0.00	600.00
D12	-.33	791.67
DOELF	68.95	18725.00

SALDO= 18725.000000

```
LINEAIR-PROGRAMMERINGSPROGRAM IMOPTI


WILT U DE GEGEVENS VIA TAPE INLEZEN?TYPE JA OF NEE ?
   CM LWA+1 = 25077B, LOADER USED  41400BNEE

GEEF DE VOLGENDE SPECIFICATIE VAN HET PROBLEEM:
AANTAL BESLISSINGSVARIABELEN ?  9

TOTAAL AANTAL RESTRICTIES ?13

AANTAL =< RESTRICTIES ?  11

AANTAL = RESTRICTIES ?  2

AANTAL >= RESTRICTIES ?  0

MOET DE DOELSTELLINGSFUNKTIE GEMAXIMEERD OF GEMINIMEERD WORDEN
TYPE MAX OF MIN ?   MAX

GEEF DE   9  NAMEN VAN DE BESLISSINGSVARIABELEN?
D11 ,D12 ,D21 ,D22 ,D31 ,D32 ,D41 ,D42 ,DM

GEEF DE BIJBEHORENDE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNKTIE IN
DEZELFDE VOLGORDE?
1,4.9,2.4,6.6,4.5,8.5,3.1,7,-80

GEEF ACHTEREENVOLGENS VOOR ELK VAN DE 13 RESTRICTIES EEN REGEL MET DE
NAAM VAN DE RESTRICTIE GEVOLGD DOOR DE TECHNISCHE COEFFICIENTEN EN HET
RECHTERLID;
DE 11 =< RESTRICTIES
 1?ZON1/4,8,0,0,0,0,0,0,0,8000

 2?ZON2/0,0,4,8,0,0,0,0,0,11000

 3?ZON3/0,0,0,0,4,8,0,0,-10,1500

 4?ZON4/0,0,0,0,0,0,4,8,0,6000

 5?MDEM/0,0,0,0,0,0,0,0,1,400

 6?ARC1/-.75,.25,0,0,0,0,0,0,0,0

 7?ARC2/0,0,-.75,.25,0,0,0,0,0,0

 8?ARC3/0,0,0,0,0,0,-.75,.25,0,0

 9?ARC4/.25,-.75,0,0,0,0,0,0,0,0

10?ARC5/0,0,.25,-.75,0,0,0,0,0,0

11?ARC6/0,0,0,0,0,0,.25,-.75,0,0

DE  2 = RESTRICTIES
 1?TDWE/1,1,1,1,1,1,1,1,-1,5000

 2?DWTY/1,-2,1,-2,1,-2,1,-2,0,0
```

ECHTE VARIABELEN D11 D12 D21 D22 D31 D32 D41 D42 DM

SLACK VARIABELEN ZON1 ZON2 ZON3 ZON4 MDEM ARC1 ARC2 ARC3 ARC4 ARC5 ARC6

ARTIFICIAL VARIABELEN TDWE DWTY

EINDOPLOSSING NA 13 ITERATIES
TABLEAU ZONDER DE KOLOMMEN DER ARTIFICIAL VARIABELEN

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN					
	ZON1	ARC6	ZON2	D32	ZON3	ARC5
D21	0.00	0.00	.15	0.00	0.00	1.60
ARC2	0.00	0.00	.10	0.00	0.00	1.40
D31	-.54	0.00	-.54	2.00	-.29	0.00
ARC3	0.00	1.40	0.00	0.00	0.00	0.00
MDEM	.21	0.00	.21	0.00	.21	0.00
ARC1	.31	-1.40	.21	-1.75	.13	-1.40
D22	0.00	0.00	.05	0.00	0.00	-.80
D42	0.00	-.80	0.00	0.00	0.00	0.00
D11	.39	-1.60	.24	-2.00	.14	-1.60
D41	0.00	1.60	0.00	0.00	0.00	0.00
ARC4	-.15	1.00	-.15	1.25	-.09	1.00
DM	-.21	0.00	-.21	0.00	-.21	0.00
D12	-.07	.80	-.12	1.00	-.07	.80
DOELF	14.78	1.68	15.07	3.40	15.65	.88

VERVOLG TABLEAU

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN	
	ZON4	WAARDE BASIS
D21	0.00	1650.00
ARC2	0.00	1100.00
D31	-.54	464.29
ARC3	.10	600.00
MDEM	.21	364.29
ARC1	.21	50.00
D22	0.00	550.00
D42	.05	300.00
D11	.24	342.86
D41	.15	900.00
ARC4	-.15	535.71
DM	-.21	35.71
D12	-.12	828.57
DOELF	15.20	16115.00

SALDO= 16115.000000

```
LINEAIR-PROGRAMMERINGSPROGRAM IMOPTI


WILT U DE GEGEVENS VIA TAPE INLEZEN?TYPE JA OF NEE ?
   CM LWA+1 = 25077B, LOADER USED  41400BNEE

GEEF DE VOLGENDE SPECIFICATIE VAN HET PROBLEEM:
AANTAL BESLISSINGSVARIABELEN ?  9

TOTAAL AANTAL RESTRICTIES ?13

AANTAL =< RESTRICTIES ?  11

AANTAL = RESTRICTIES ?  2

AANTAL >= RESTRICTIES ?  0

MOET DE DOELSTELLINGSFUNKTIE GEMAXIMEERD OF GEMINIMEERD WORDEN
TYPE MAX OF MIN ?   MAX

GEEF DE   9  NAMEN VAN DE BESLISSINGSVARIABELEN?
D11 ,D12 ,D21 ,D22 ,D31 ,D32 ,D41 ,D42 ,DM

GEEF DE BIJBEHORENDE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNKTIE IN
DEZELFDE VOLGORDE?
1,4.9,2.4,6.6,4.5,8.5,3.1,7,-80

GEEF ACHTEREENVOLGENS VOOR ELK VAN DE 13 RESTRICTIES EEN REGEL MET DE
NAAM VAN DE RESTRICTIE GEVOLGD DOOR DE TECHNISCHE COEFFICIENTEN EN HET
RECHTERLID;
DE 11 =< RESTRICTIES
 1?ZON1/4,8,0,0,0,0,0,0,0,8000

 2?ZON2/0,0,4,8,0,0,0,0,0,10000

 3?ZOM3/0,0,0,0,4,8,0,0,-10,1500

 4?ZON4/0,0,0,0,0,0,4,8,0,6000

 5?MDEM/0,0,0,0,0,0,0,0,1,400

 6?ARC1/-.75,.25,0,0,0,0,0,0,0,0

 7?ARC2/0,0,-.75,.25,0,0,0,0,0,0

 8?ARC3/0,0,0,0,0,0,-.75,.25,0,0

 9?ARC4/.25,-.75,0,0,0,0,0,0,0,0

10?ARC5/0,0,.25,-.75,0,0,0,0,0,0

11?ARC6/0,0,0,0,0,0,.25,-.75,0,0

DE  2 = RESTRICTIES
 1?TDWE/1,1,1,1,1,1,1,1,-1,5000

 2?DWTY/1,-2,1,-2,1,-2,1,-2,0,0
```

```
ECHTE VARIABELEN          D11  D12  D21  D22  D31  D32  D41  D42  DM

SLACK VARIABELEN          ZON1 ZON2 ZOM3 ZON4 MDEM ARC1 ARC2 ARC3 ARC4
                          ARC5 ARC6
ARTIFICIAL VARIABELEN     TDWE  DWTY

EINDOPLOSSING NA  14  ITERATIES
        TABLEAU ZONDER DE KOLOMMEN DER ARTIFICIAL VARIABELEN
```

BASIS VARIA BELEN — NIET-BASISVARIABELEN

	ZON1	ARC6	ZON2	ARC1	ZOM3	D32
D21	.36	-1.60	.39	1.14	.14	-2.00
ARC2	.31	-1.40	.31	1.00	.13	-1.75
ARC5	-.22	1.00	-.15	-.71	-.09	1.25
ARC3	0.00	1.40	0.00	0.00	0.00	0.00
MDEM	.21	0.00	.21	0.00	.21	0.00
D31	-.54	0.00	-.54	0.00	-.29	2.00
D22	-.18	.80	-.07	-.57	-.07	1.00
D42	0.00	-.80	0.00	0.00	0.00	0.00
D11	.04	0.00	0.00	-1.14	0.00	0.00
D41	0.00	1.60	0.00	0.00	0.00	0.00
ARC4	.07	0.00	0.00	.71	0.00	0.00
DM	-.21	0.00	-.21	0.00	-.21	0.00
D12	.11	0.00	0.00	.57	0.00	0.00
DOELF	14.97	.80	15.20	.63	15.73	2.30

VERVOLG TABLEAU

BASIS VARIA BELEN — NIET-BASISVARIABELEN

	ZON4	WAARDE BASIS
D21	.24	1314.29
ARC2	.21	837.50
ARC5	-.15	116.07
ARC3	.10	600.00
MDEM	.21	150.00
D31	-.54	1000.00
D22	-.12	592.86
D42	.05	300.00
D11	0.00	285.71
D41	.15	900.00
ARC4	0.00	571.43
DM	-.21	250.00
D12	0.00	857.14
DOELF	15.33	942.86

SALDO=   942.857143

```
LINEAIR-PROGRAMMERINGSPROGRAM IMOPTI


WILT U DE GEGEVENS VIA TAPE INLEZEN?TYPE JA OF NEE ?
   CM LWA+1 = 25077B, LOADER USED  41400BNEE

GEEF DE VOLGENDE SPECIFICATIE VAN HET PROBLEEM:
AANTAL BESLISSINGSVARIABELEN ?  9

TOTAAL AANTAL RESTRICTIES ?13

AANTAL =< RESTRICTIES ?  11

AANTAL = RESTRICTIES ?  2

AANTAL >= RESTRICTIES ?  0

MOET DE DOELSTELLINGSFUNKTIE GEMAXIMEERD OF GEMINIMEERD WORDEN
TYPE MAX OF MIN ?   MAX

GEEF DE   9  NAMEN VAN DE BESLISSINGSVARIABELEN?
D11

FOUTIEVE INVOER.DE  9  NAMEN DIENEN TE BESTAAN UIT PRECIES VIER
KARAKTERS(INCLUSIEF SPATIES),GESCHEIDEN DOOR KOMMA'S
D11 ,D12 ,D21 ,D22 ,D31 ,D32 ,D41 ,D42 ,DM

GEEF DE BIJBEHORENDE COEFFICIENTEN VAN DE DOELSTELLINGSFUNKTIE IN
DEZELFDE VOLGORDE?
1,4.9,2.4,6.6,4.5,8.5,3.1,7,-80

GEEF ACHTEREENVOLGENS VOOR ELK VAN DE 13 RESTRICTIES EEN REGEL MET DE
NAAM VAN DE RESTRICTIE GEVOLGD DOOR DE TECHNISCHE COEFFICIENTEN EN HET
RECHTERLID;
DE 11 =< RESTRICTIES
 1?ZON1/4,8,0,0,0,0,0,0,0,8000

 2?ZON2/0,0,4,8,0,0,0,0,0,9350

 3?ZON3/0,0,0,0,4,8,0,0,-10,1500

 4?ZOM4/0,0,0,0,0,0,4,8,0,6000

 5?MDEM/0,0,0,0,0,0,0,0,1,400

 6?ARC1/-.75,.25,0,0,0,0,0,0,0,0,

 7?ARC2/0,0,-.75,.25,0,0,0,0,0,0

 8?ARC3/0,0,0,0,0,0,-.75,.25,0,0

 9?ARC4/.25,-.75,0,0,0,0,0,0,0,0

10?ARC5/0,0,.25,-.75,0,0,0,0,0,0

11?ARC6/0,0,0,0,0,0,.25,-.75,0,0

DE  2 = RESTRICTIES
 1?TDWE/1,1,1,1,1,1,1,1,-1,5000

 2?DWTY/1,-2,1,-2,1,-2,1,-2,0,0
```

ECHTE VARIABELEN D11 D12 D21 D22 D31 D32 D41 D42 DM

SLACK VARIABELEN ZON1 ZON2 ZON3 ZOM4 MDEM ARC1 ARC2 ARC3 ARC4 ARC5 ARC6

ARTIFICIAL VARTABELEN TDWE DWTY

EINDOPLOSSING NA 14 ITERATIES

TABLEAU ZONDER DE KOLOMMEN DER ARTIFICIAL VARIABELEN

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN					
	ZON1	ARC1	ZON2	ZON3	D32	ZOM4
D21	.36	1.14	.39	.14	-2.00	.24
ARC2	.31	1.00	.31	.13	-1.75	.21
ARC5	-.22	-.71	-.15	-.09	1.25	-.15
ARC3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	.10
MDEM	.21	0.00	.21	.21	0.00	.21
ARC4	.07	.71	0.00	0.00	0.00	0.00
D22	-.18	-.57	-.07	-.07	1.00	-.12
D42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	.05
D11	.04	-1.14	0.00	0.00	0.00	0.00
D41	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	.15
DM	-.21	0.00	-.21	-.21	0.00	-.21
D31	-.54	0.00	-.54	-.29	2.00	-.54
D12	.11	.57	0.00	0.00	0.00	0.00
DOELF	14.97	.63	15.20	15.73	2.30	15.33

VERVOLG TABLEAU

BASIS VARIA BELEN	NIET-BASISVARIABELEN	
	ARC6	WAARDE BASIS
D21	-1.60	1058.93
ARC2	-1.40	634.37
ARC5	1.00	214.73
ARC3	1.40	600.00
MDEM	0.00	10.71
ARC4	0.00	571.43
D22	.80	639.29
D42	-.80	300.00
D11	0.00	285.71
D41	1.60	900.00
DM	0.00	389.29
D31	0.00	1348.21
D12	0.00	857.14
DOELF	.80	-8939.46

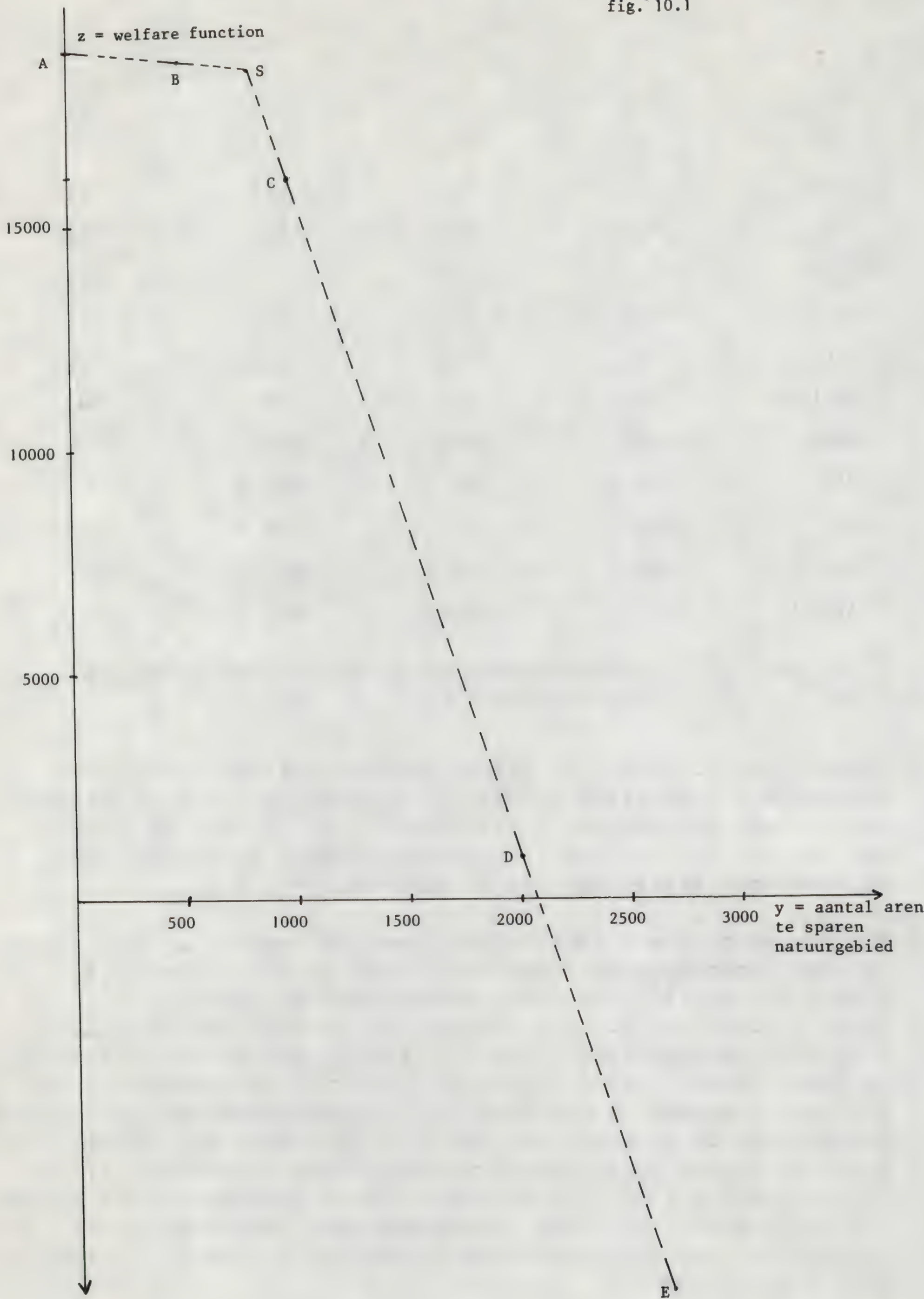
SALDO= -8939.464286

Alternatief				
A	B	C	D	E
D_{11}	D_{11}	D_{11}	D_{11}	D_{11}
D_{12}	D_{12}	D_{12}	D_{12}	D_{12}
D_{21}	D_{21}	D_{21}	D_{21}	D_{21}
D_{22}	D_{22}	D_{22}	D_{22}	D_{22}
D_{31}	D_{31}	D_{31}	D_{31}	D_{31}
D_{41}	D_{41}	D_{41}	D_{41}	D_{41}
D_{42}	D_{42}	D_{42}	D_{42}	D_{42}
ZON 1	ZON 2	DM	DM	DM
MDEM	MDEM	MDEM	MDEM	MDEM
ARC 1	ARC 1	ARC 1	ARC 2	ARC 2
ARC 2	ARC 2	ARC 2	ARC 3	ARC 3
ARC 3	ARC 3	ARC 3	ARC 4	ARC 4
ARC 4	ARC 4	ARC 4	ARC 5	ARC 5

- tabel 10.2. Basisvariabelen in de vijf alternatieve oplossingen -

In tabel 10.2. zien wij, dat de verzameling basisvariabelen bij alternatief B dezelfde is als bij alternatief A. Alle schaduwprijzen bij alternatief B zijn dus [14]) gelijk aan de schaduwprijzen bij alternatief A. Een soortgelijke uitspraak kunnen wij doen met betrekking tot de alternatieven D en E.

Wij kunnen nu z als functie van y vrijwel geheel in een grafiek in beeld brengen (zie figuur 10.1). De alternatieven A, B, C, D en E van tabel 10.1. komen overeen met de punten A, B, C, D en E in figuur 10.1. De hellingen van de door de punten A, B, C en D getekende lijnstukjes zijn gelijk aan de met -1 vermenigvuldigde waarden van u_2 in tabel 10.1. [15]). De punten C, D en E liggen nagenoeg op één lijn (de schaduwprijzen van het natuurgebied zijn in de alternatieven C, D en E nagenoeg gelijk). Teneinde de grafiek volledig te kunnen tekenen moeten wij nog het snijpunt van de lijn AB en de lijn DC berekenen. Wij kunnen dit onder andere doen door de benedengrens van de range of feasibility van het rechterlid van restrictie ZON 2 in alternatief B te berekenen.


fig. 10.1
z = welfare function
A
B
S
C
15000
10000
5000
D
500
1000
1500
2000
2500
3000
y = aantal aren
te sparen
natuurgebied
E

Deze benedengrens is:

$$\max\left(\frac{-1725}{0,15}, \frac{-1150}{0,10}, \frac{-333,33}{1}, \frac{-575}{0,05}\right) < \Delta b_1$$

ofwel

$$-333,33 < \Delta b_1$$

ofwel

$$11500 - 333,33 < b_1$$

ofwel

$$11166,67 < b_1$$

De coördinaten van punt S zijn dus

$$y = 833,33,\ z = 18872 - 833,33 * 0,30 = 18622$$

Met figuur 10.1. hebben wij de efficiency-curve van de beide doelstellingen gevonden. Alle punten op de lijn ASE zijn efficiënte oplossingen. Tussen deze efficiënte oplossingen kan slechts op subjectieve gronden een keuze worden gemaakt.

10.5. LINEAIRE PROGRAMMERING ALS HULPMIDDEL BIJ HET BESLUITVORMINGSPROCES TEN AANZIEN VAN DE RUIMTELIJKE ORDENING

Het in paragraaf 10.2. gegeven voorbeeld is sterk gesimplificeerd. De modellen, die in de praktijk bij het besluitvormingsproces ten aanzien van de ruimtelijke ordening worden gehanteerd zijn aanzienlijk groter. In de praktijk zullen in het algemeen naast het bouwen en slopen van woningen ook andere activiteiten in het model worden opgenomen. Daarbij moet dan worden gedacht aan het bouwen en/of slopen van voorzieningen (winkels, scholen en andere volgende dienstverlenende bedrijven en instellingen), aan het bouwen en/of slopen van stuwende dienstverlenende bedrijven en instellingen, aan het creëren van industrieterrein, openbaar groen op stadsniveau of stadsdeelniveau etc. Voorts zullen in het algemeen twee of meer perioden worden onderscheiden. Tenslotte zal er in het algemeen meer dan één doelstelling zijn, die niet rechtstreeks in de doelstellingsfunctie tot uitdrukking kan worden gebracht (in het voorbeeld van paragraaf 10.2. was er één doelstelling, die niet rechtstreeks in de doelstellingsfunctie tot uitdrukking kon worden gebracht namelijk het in standhouden van het natuurgebied in zone 2). Door deze toevoegingen wordt het model niet wezenlijk anders; wel wordt het model natuurlijk aanzienlijk groter.

Welke voor- en nadelen zijn verbonden aan het gebruik van lineaire programmeringsmodellen bij het besluitvormingsproces ten aanzien van de ruimtelijke ordening?
Voordat wij deze vraag beantwoorden maken wij enkele algemene opmerkingen over het besluitvormingsproces ten aanzien van de ruimtelijke ordening. Enkele kenmerken daarvan zijn:
- de besluitvorming vindt plaats op verschillende niveaus (Rijk, provincie, gemeente en soms nog een vierde niveau tussen de provincie en de gemeente, namelijk de agglomeratie of het gewest)
- de besluitvorming op ieder niveau wordt gekenmerkt door het feit, dat er niet één "decision maker" is, die de doelstellingen vaststelt en het plan uiteindelijk vaststelt. Er zijn steeds meerdere groepen (bij een gemeente het college van burgemeester en wethouders, de gemeenteraad, enkele gemeentelijke diensten zoals de afdelingen financiën, openbare werken en inspraakgroepen uit de bevolking), die aan de besluitvorming meedoen
- de probleemstelling vraagt om een multidisciplinaire aanpak. Het door een gemeente geformeerd team voor het opstellen van een structuurplan kan bijvoorbeeld bestaan uit deskundigen op het gebied van architectuur en stedebouw, planologie, sociologie, financiën, verkeer en vervoer, natuur en landschap, milieu etc.
- niet alle doelstellingen kunnen door middel van wegingsfactoren in dezelfde eenheid worden uitgedrukt (het instandhouden van natuurgebieden en het minimeren van reistijden zijn voorbeelden van twee doelstellingen, die niet in dezelfde eenheid kunnen worden uitgedrukt).

Het gebruik van lineaire programmering als hulpmiddel bij het besluitvormingsproces ten aanzien van de ruimtelijke ordening heeft de volgende voor- en nadelen:
- door gebruik te maken van een LP-model worden alle betrokkenen gedwongen zich te bezinnen op de doelstellingen. Indien geen gebruik wordt gemaakt van een mathematisch model, gaan de betrokkenen al zeer snel denken aan bepaalde oplossingen in de vorm van kaartbeelden. Dit geeft dan aanleiding tot een onderhandelingssituatie, waarin sommige actoren de éne andere actoren een andere oplossing trachten te pousseren of te elimineren. Door gebruikmaking van een LP-model wordt de discussie allereerst gericht op de doelstellingen en pas daarna op de oplossingen.
- het is mogelijk een groot aantal efficiënte plannen op te stellen. Zo vermijdt men het anders bestaande gevaar, dat gediscussieerd wordt tussen plan A en plan B, terwijl plan C zowel plan A als plan B domineert.

- door middel van de gevoeligheidsanalyse van de coëfficiënten van de doelstellingsfunctie kan men nagaan welke graad van nauwkeurigheid voor bepaalde gegevens is vereist. Men kan bij het verzamelen van gegevens als volgt te werk gaan: inventariseer eerst welke gegevens direct beschikbaar zijn en maak ten aanzien van de ontbrekende gegevens schattingen. Voer deze gegevens in en pas de gevoeligheidsanalyse van de coëfficiënten van de doelstellingsfunctie toe. Besteed nu bij het onderzoek naar de nog ontbrekende gegevens de meeste aandacht aan die gegevens, waarvoor de oplossing het meest gevoelig is.
  Wij merken hierbij op dat de gevoeligheidsanalyse van een bepaalde coëfficiënt van de doelstellingsfunctie geheel berust op de veronderstelling, dat alle overige gegevens ongewijzigd blijven (zie paragraaf 7.1.). Zijn van vele gegevens slechts grove schattingen bekend, dan hebben de conclusies die men uit de gevoeligheidsanalyse kan trekken dus slechts een zeer beperkte waarde. Daarbij komt nog, dat men bij de gevoeligheidsanalyse van de coëfficiënten van de doelstellingsfunctie slechts één doelstelling in beschouwing neemt (de overige doelstellingen zijn dan in de vorm van restricties in het model opgenomen). Ook hierdoor neemt de waarde van de conclusies, die men uit de gevoeligheidsanalyse zou kunnen trekken af.
- men kan het LP-model gebruiken *als coördinatiemiddel in organisatorische zin*. Bij wijze van voorbeeld beschouwen wij het opstellen van een structuurplan voor een gemeente. Het opstellen van het structuurplan kan men zien als een project, waaraan verschillende personen, die dikwijls bij verschillende organisaties werkzaam zijn, deelnemen. Het opstellen van het LP-model kan in een dergelijke projectorganisatie de functie van coördinatiemiddel krijgen. Men verdeelt het project dan in fasen zoals vaststellen van doelstellingen, gegevens verzamelen eerste ronde, output eerste ronde bespreken, bijstellen van doelstellingen, gegevens verzamelen tweede ronde, output tweede ronde bespreken etc.
- men kan LP-modellen gebruiken *als coördinatiemiddel in planologische zin*. Om duidelijk te maken wat wij daarmee bedoelen beschouwen wij het volgende voorbeeld. Stel men stelt een LP-model op voor een agglomeratie van 9 gemeenten. In het model worden 9 zones onderscheiden die overeenkomen met het grondgebied van de 9 gemeenten. In het uiteindelijk gekozen plan vindt men dan onder andere de schaduwprijzen van de grond in ieder van de negen gemeenten. Deze schaduwprijzen kan men dan gebruiken als input-gegeven bij de LP-modellen, die men voor de afzonderlijke gemeenten kan opstellen. Op deze wijze komt een goede coördinatie tussen de betrokken gemeenten tot stand.
- het gebruik van een LP-model kan heel goed worden gecombineerd met een goede inspraakprocedure door de bevolking. De inspraak

kan meer inhoud krijgen, doordat men met behulp van een LP-model gemakkelijk alternatieve plannen kan produceren. Desondanks ervaren sommige bij de besluitvorming betrokken personen het gebruik van een LP-model als "technocratisch".

UITWERKING VAN ENKELE VRAAGSTUKKEN

2-1. De eerste stap is het opschrijven van een tabel, waarin de voor dit probleem relevante data zijn vermeld:

Capaciteitsbeslag in uren per stuk	Produkt A	Produkt B	Beschikbaar aantal uren per week
afdeling I	2	4	1800
afdeling II	4	5	3000

a. Van produkt A kan men voor wat betreft afdeling I maximaal 900 stuks, voor wat betreft afdeling II maximaal 750 stuks fabriceren. De bottleneck is dus afdeling II. Men kan maximaal 750 eenheden A fabriceren.
Van afdeling I zijn dan nog beschikbaar 1800 - 750 * 2 = 300 uren. De behaalde dekking bedraagt 750 * 200 = ƒ 150.000,-.

b. Van produkt B kan men ten hoogste produceren $\min(\frac{1800}{4}, \frac{3000}{5}) = 450$ eenheden. De bottleneck is dan afdeling I.
Van afdeling II zijn dan nog beschikbaar 3000 - 450 * 5 = 750 uren. De behaalde dekking bedraagt 450 * 300 = ƒ 135.000,-.

c. Het LP-model luidt:
maximeer

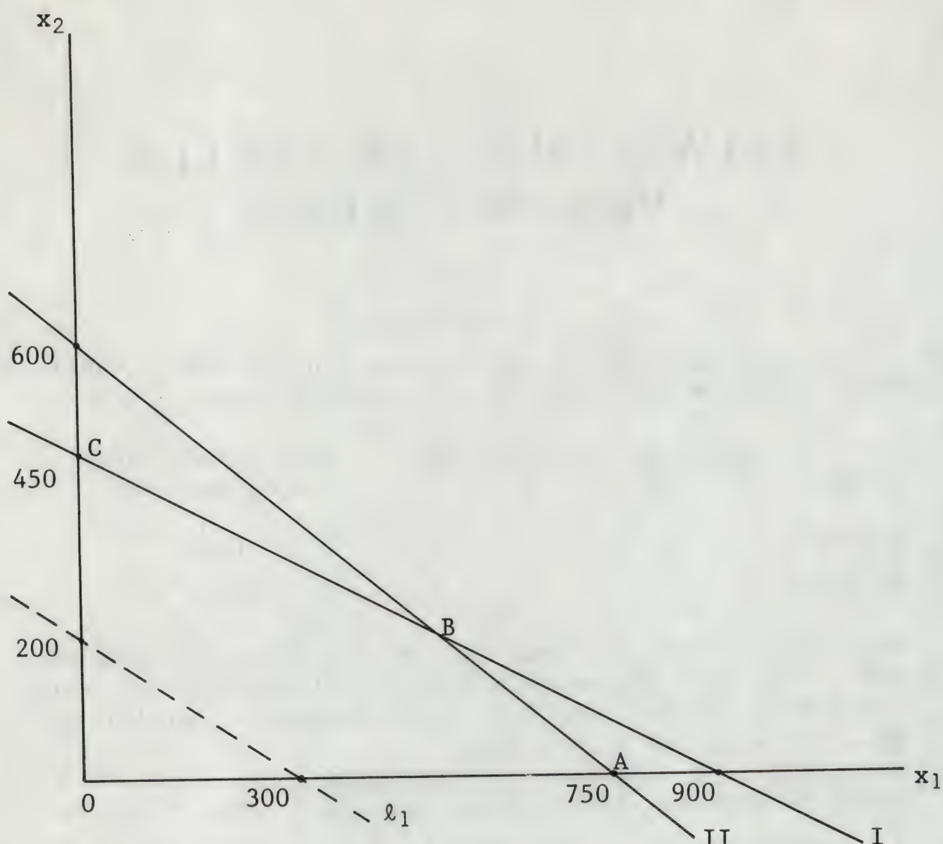
$$200x_1 + 300x_2$$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1800$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 3000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Het gebied van de feasible solutions is OABC.
Wij tekenen in de grafiek lijn ℓ_1: $200x_1 + 300x_2 = 60.000$.
Door deze lijn zo ver mogelijk evenwijdig aan zichzelf van de oorsprong te verschuiven komen wij in punt B. Punt B komt dus overeen met de optimale oplossing.
De coördinaten van B vinden wij door oplossen van het stelsel

$$2x_1 + 4x_2 = 1800$$

$$4x_1 + 5x_2 = 3000$$

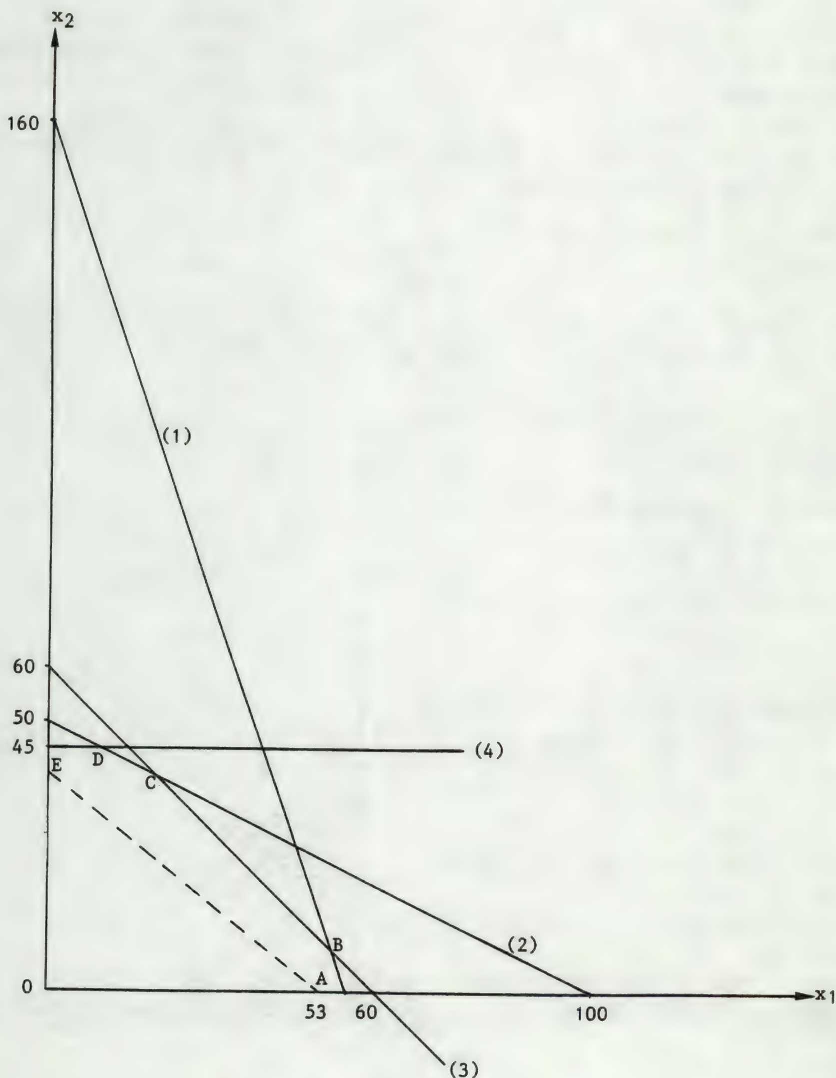
$x_1 = 500$, $x_2 = 200$. De behaalde dekking is dan

$$200 * 500 + 300 * 200 = 160.000$$

2-2. De gegevens, die voor dit probleem van belang zijn, staan vermeld in onderstaande tabel:

Capaciteitsbeslag in uren per stuk*	staart-klokken	stoeltjes-klokken	Beschikbare capaciteit in aantal uren per week*
houtafdeling	3	1	160
spuiterij	0,4	0,8	40
montage	2	2	120
bankwerkerij*	0	1	45

* Voor de afdeling bankwerkerij is het capaciteitsbeslag en de beschikbare capaciteit niet uitgedrukt in uren maar in "aantal uurwerken".



Het LP-model luidt:
maximeer

$$160x_1 + 200\,x_2$$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad x_2 &\leqq 160 \qquad (1)\\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 &\leqq \ \ 40 \qquad (2)\\ 2x_1 + \quad 2x_2 &\leqq 120 \qquad (3)\\ x_2 &\leqq \ \ 45 \qquad (4)\end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2 \geqq 0$$

Het gebied van de feasible solutions is OABCDE. De lijn $160x_1 + 200x_2 = 8000$ geeft de verzameling van oplossingen met een dekking van 8000. Deze lijn is in de figuur aangegeven als een onderbroken lijn.
Het optimum is punt C. De coördinaten van punt C vinden wij door de lijnen (2) en (3) met elkaar te snijden:

$$\begin{aligned} 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 &= \ \ 40\\ 2x_1 + \quad 2x_2 &= 120\end{aligned}$$

Oplossen van dit stelsel levert x = 20, x = 40. De behaalde dekking is dan 160 * 20 + 200 * 40 = 11 200.

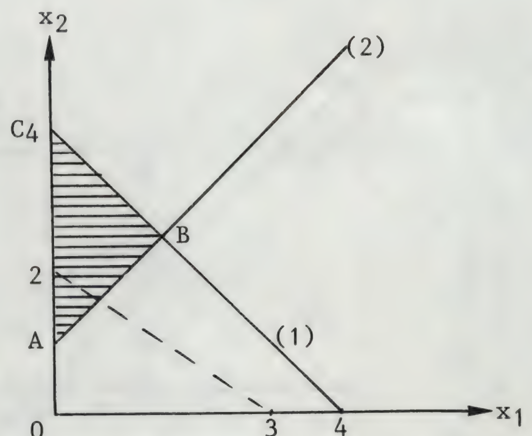
2-3. Het gegeven LP-model is:

maximeer $2x_1 + 3x_2$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 4 \qquad (1)\\ -x_1 + x_2 &\geqq 1 \qquad (2)\\ x_1,\ x_2 &\geqq 0\end{aligned}$$

Driehoek ABC is het gebied van de feasible solutions. Verschuift men de onderbroken lijn evenwijdig aan zichzelf zo ver mogelijk naar rechtsboven, dan ziet men dat punt C de optimale oplossing is. De coördinaten van punt C zijn: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. De waarde van de doelstellingsfunctie in punt C is 12.



2-4. Het gegeven LP-model is:

minimeer $2x_1 + 3x_2$

onder de voorwaarden

$x_1 + 2x_2 \geqq 8$ (1)

$x_1 + x_2 \geqq 6$ (2)

$x_1, x_2 \geqq 0$

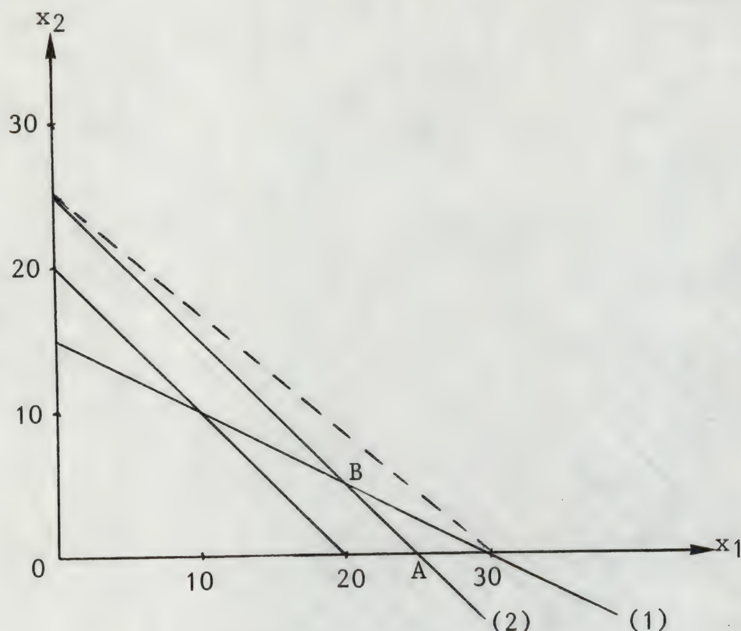
Het gebied van de feasible solutions is het gehele eerste kwadrant met uitzondering van de vierhoek OABC. Dit gebied strekt zich dus uit tot het oneindige. Omdat we de doelstellingsfunctie moeten minimeren, moeten we lijn ℓ zo ver mogelijk evenwijdig aan zichzelf naar de oorsprong toe verschuiven. Men ziet op die manier, dat punt B het optimum is. De coördinaten van B zijn: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. De waarde van de doelstellingsfunctie in punt B bedraagt 14.

2-5. Het gegeven LP-model luidt:

maximeer $10x_1 + 12\,x_2$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leqq 60 \qquad (1)$$
$$x_1 + x_2 = 25 \qquad (2)$$
$$2x_1 + 2x_2 \geqq 40 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$



Het gebied van de feasible solutions bestaat uit het lijnstuk AB. De optimale oplossing is punt B ($x_1 = 20$, $x_2 = 5$). De waarde van de doelstellingsfunctie in punt B bedraagt 260.

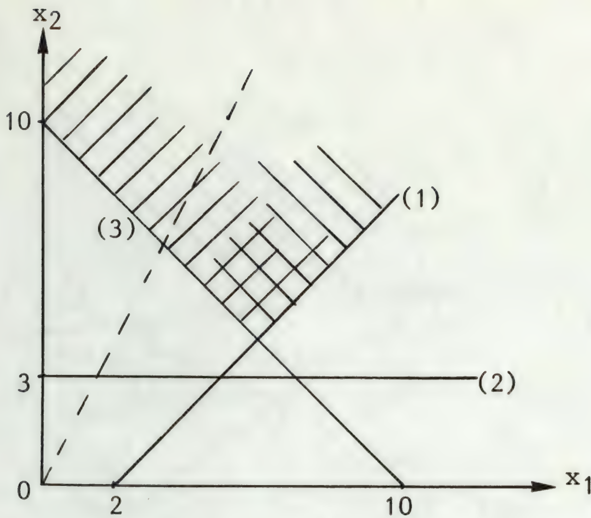
Opmerking: Restrictie (3) is niet van belang voor het bepalen van de grenzen van het gebied van de feasible solutions. Men noemt zo'n restrictie redundant (overbodig).

2-6. Het gegeven LP-model is:

maximeer $2x_1 - x_2$

onder de voorwaarden

$$x_1 - x_2 \leqq 2 \qquad (1)$$
$$x_2 \geqq 3 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_2 \geqq 10 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$



Het gebied van de feasible solutions is het gearceerde gebied, dat wordt begrensd door de x_2-as en de lijnen (3) en (1). Men moet de onderbroken lijn zover mogelijk naar rechts schuiven. Men kan in dit geval zo ver naar rechts schuiven als men maar wil, waardoor de waarde van de doelstellingsfunctie willekeurig groot kan worden. Het model heeft dus wel feasible solutions, maar niet een eindige optimale oplossing. Men noemt een dergelijk LP-probleem unbounded (onbegrensd).
Als men in een praktijksituatie een dergelijk probleem ontmoet, dan betekent dat gewoonlijk dat er bij de modelformulering een fout is gemaakt.

Opmerking: Restrictie (2) is in dit probleem redundant.

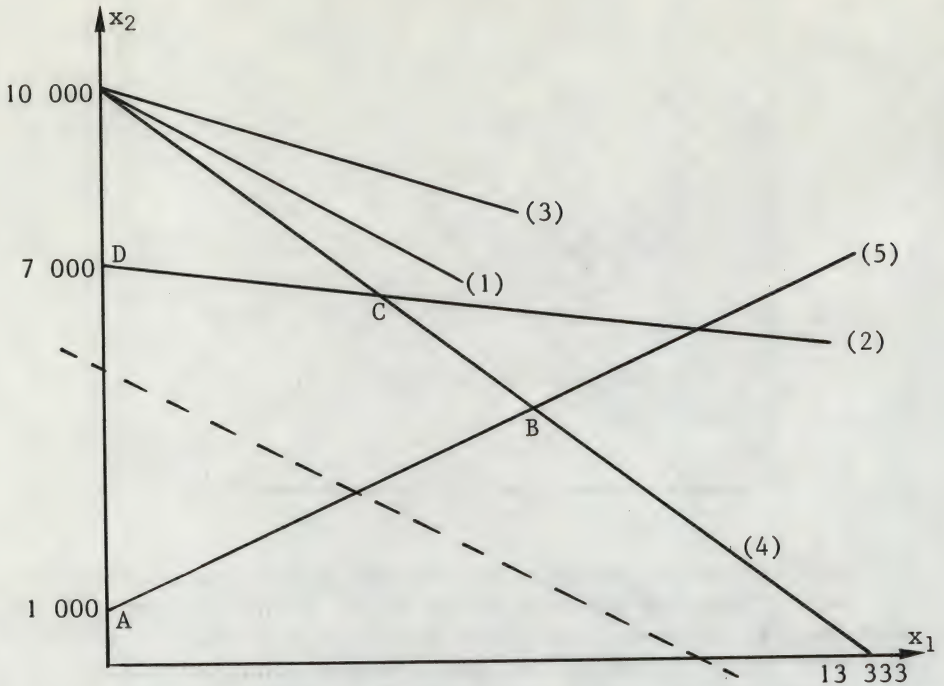
2-7. a. Het model luidt:

maximeer $200\,x_1 + 400\,x_2$

onder de voorwaarden

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leqq 10\,000 \qquad (1)$$
$$\frac{1}{8}x_1 + x_2 \leqq 7\,000 \qquad (2)$$
$$x_1 + 3x_2 \leqq 30\,000 \qquad (3)$$
$$3x_1 + 4x_2 \leqq 40\,000 \qquad (4)$$
$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geqq 1\,000 \qquad (5)$$

b. Vierhoek ABCD is het gebied van de feasible solutions. Punt C is het optimum. De coördinaten van C vindt men door de lijnen



(2) en (4) te snijden. Deze coördinaten zijn x_1 = 4800, x_2 = 6400. De bruto-winst bedraagt in punt C 200 * 4800 + 400 * 6400 = 3.520.000.

Opmerking: De restricties (1) en (3) zijn in dit probleem redundant.

2-9. Hint: Noem x_1 de fractie van olie A en x_2 de fractie van olie B. Het mensel bevat dan een fractie $1-x_1-x_2$ van olie C.

3-1. a. Na toevoeging van de verkooprestrictie luidt het LP-model:

maximeer $200x_1 + 300\, x_2$

onder de voorwaarden:

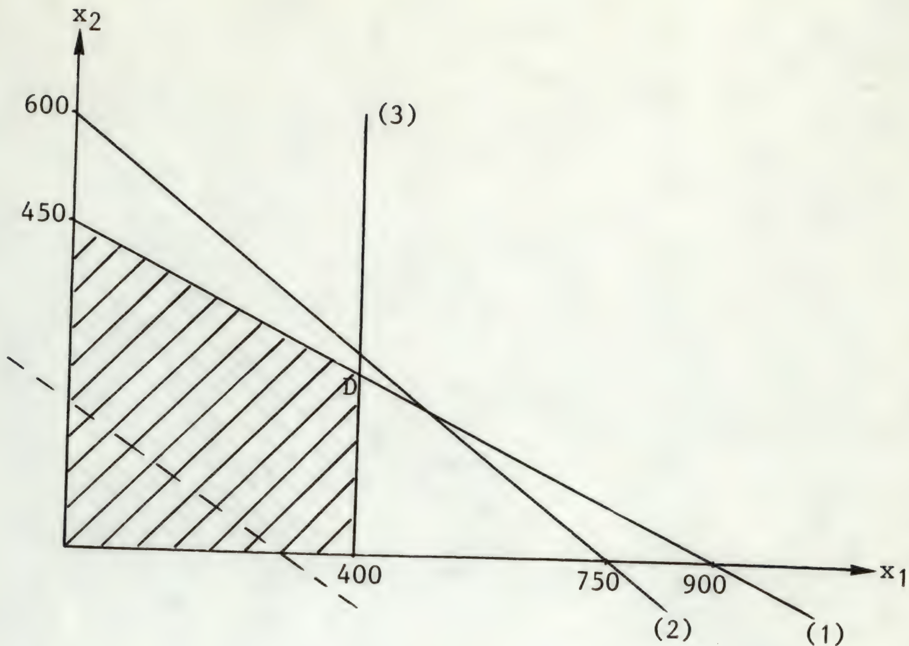
$2x_1 + 4x_2 \leqq 1800$ (1)

$4x_1 + 5x_2 \leqq 3000$ (2)

$x_1 \leqq 400$ (3)

$x_1,\ x_2 \geqq 0$

Het gebied van de feasible solutions is het gearceerde gebied. Het optimum is punt D. De coördinaten van punt D zijn x_1 = 400, x_2 = 250. De waarde van de doelstellingsfunctie in punt D is 200 * 400 + 300 * 250 = 155 000.

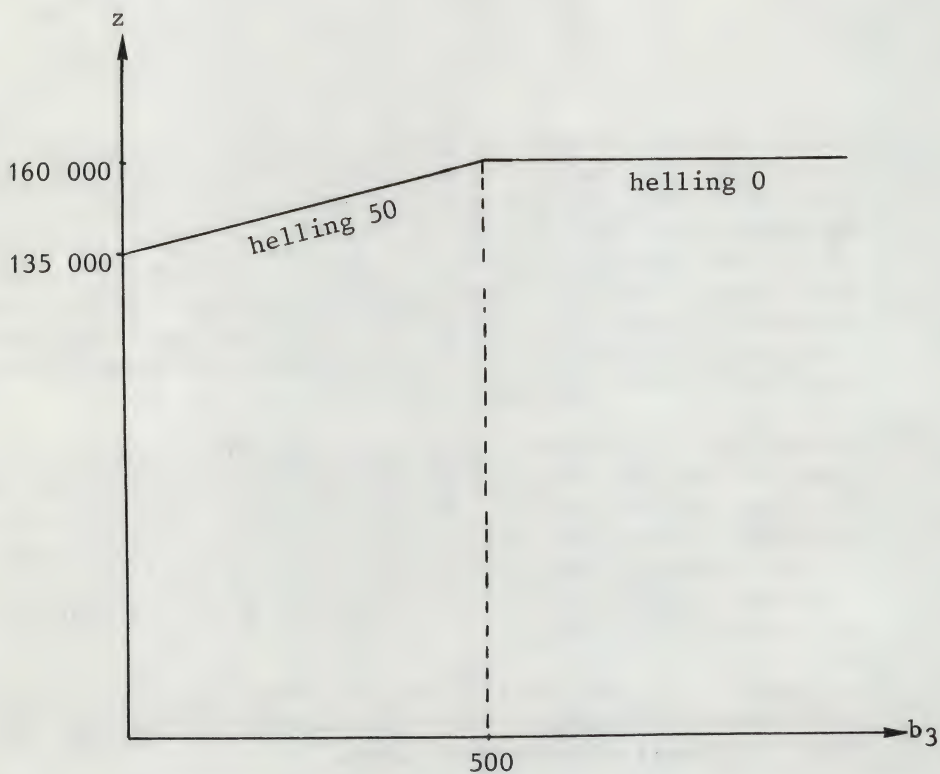


b. Om de schaduwprijs van de derde restrictie te berekenen vervangen wij deze door $x_1 \leqq 401$. Het optimum is dan het punt D', dat ligt op de lijn $2x_1 + 4x_2 = 1800$ èn op de lijn $x_1 = 401$. De coördinaten van D' zijn $x_1 = 401$, $x_2 = 249{,}5$. De waarde van de doelstellingsfunctie in punt D' bedraagt $200 * 401 + 300 * 249{,}5 = 155\,050$. Doordat de verkooprestricties met één eenheid is verruimd is de waarde van de doelstellingsfunctie toegenomen met $155\,050 - 150\,000 = 50$. De schaduwprijs van de verkooprestrictie is dus ƒ 50,-.

Opmerking: Als de verkooprestrictie met één eenheid wordt verruimd kan men één eenheid van produkt A extra verkopen. Men moet dan ook één eenheid van produkt A extra produceren; omdat afdeling I reeds vol bezet is, moet men van produkt B een halve eenheid minder produceren. Per saldo neemt de behaalde dekking toe met $200 - \frac{1}{2} * 300 = 50$ en dit is de schaduwprijs van de verkooprestrictie.

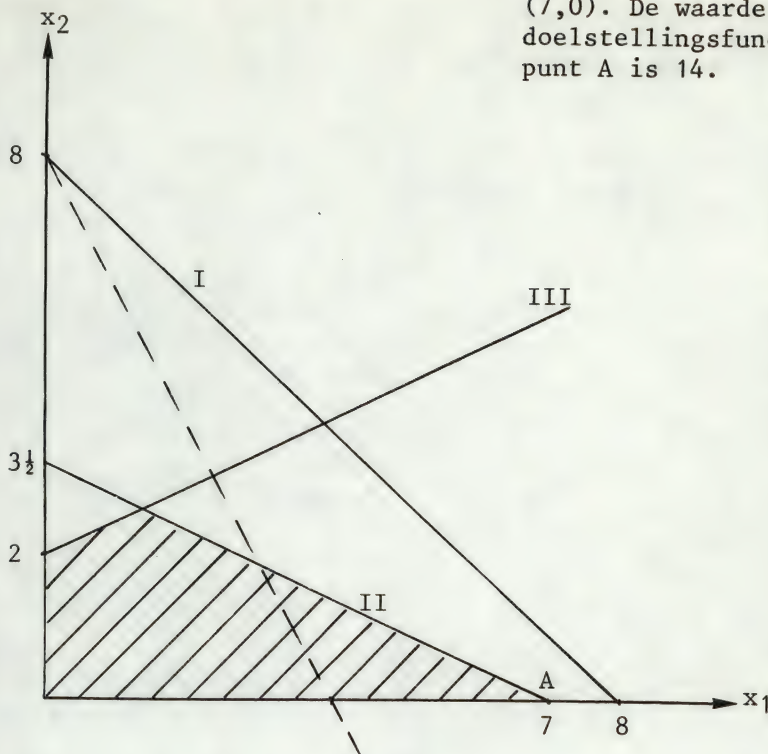
c. De waarden, die de doelstellingsfunctie z aanneemt als men het optimum steeds bepaalt voor verschillende waarden van b_3 zijn af te lezen uit onderstaande tabel.

b_3	x_1	x_2	z	Δz
0	0	450	135 000	--
1	1	449,5	135 050	50
2	2	449	135 100	50
⋮				
499	449	200,5	159 950	50
500	500	200	160 000	50
501	500	200	160 000	0
⋮				
1000	500	200	160 000	0



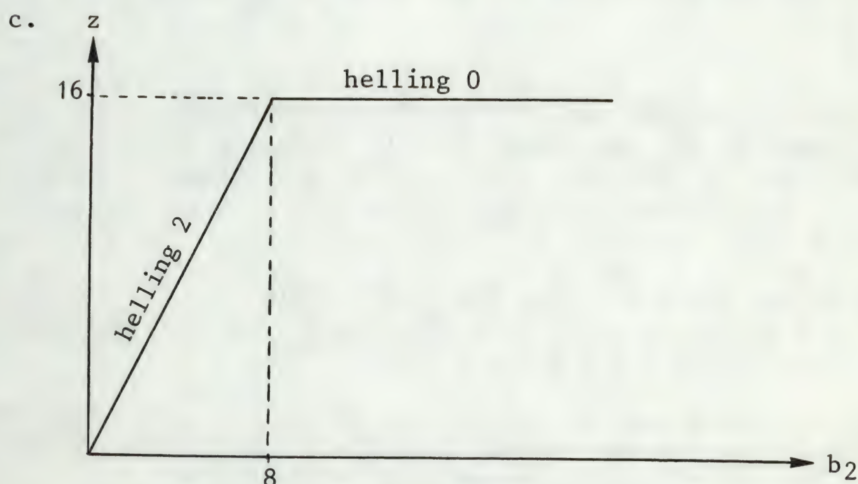
3-2. a.

Het optimum is punt A (7,0). De waarde van de doelstellingsfunctie in punt A is 14.



b. Vervang restrictie II door $x + 2x \leqq 8$. Het optimum wordt dan punt A' (8,0). De waarde van de doelstellingsfunctie in punt A' bedraagt 16. De schaduwprijs van restrictie II is dus ƒ 2,-.

c.



3-3. Het LP-model is:

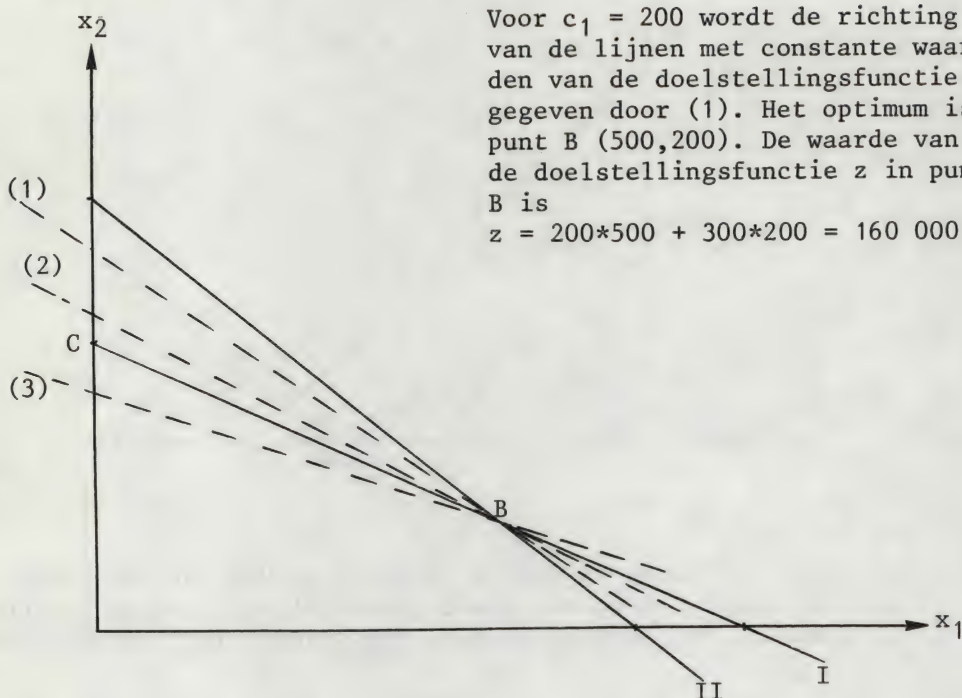
maximeer $200x_1 + 300\ x_2$

onder de voorwaarden

$$2x_1 + 4x_2 \leqq 1800 \qquad \text{I}$$

$$4x_1 + 5x_2 \geqq 3000 \qquad \text{II}$$

$$x_1,\ x_2 \geqq 0$$



Voor $c_1 = 200$ wordt de richting van de lijnen met constante waarden van de doelstellingsfunctie gegeven door (1). Het optimum is punt B (500,200). De waarde van de doelstellingsfunctie z in punt B is
$z = 200*500 + 300*200 = 160\ 000$.

Als c_1 daalt van 200 naar 160, draait de onderbroken lijn een eindje tegen de wijzers van de klok in om punt B en gaat over in lijn (2). Het optimum blijft dan punt B. Wel verandert de waarde van de doelstellingsfunctie in punt B; deze bedraagt nu
$z = 160 * 500 + 300 * 200 = 140\ 000$.

Als c_1 verder daalt tot 120, draait de onderbroken lijn verder tegen de wijzers van de klok in tot lijn (3). Punt C is nu het optimum en $z = 200 * 0 + 300 * 450 = 135\ 000$.

Wij bepalen nu de grenzen, waarbinnen c_1 kan variëren zonder dat het optimum verschuift van punt B naar een ander punt. De lijn
$c_1x_1 + 300x$ = constant is evenwijdig met lijn I als
$c_1 : 2 = 300 : 4$, dus als $c_1 = 150$.

De lijn $c_1x_1 + 300x_2$ = constant is evenwijdig met lijn II als $c_1 : 4 = 300 : 5$, dus als $c_1 = 240$.
De gezochte grenzen zijn dus $150 < c_1 < 240$.

4-1. a. De restricties luiden als volgt:

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2000 \quad \text{manuren}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1400 \quad \text{machine-uren I}$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1500 \quad \text{machine-uren II}$$

Ten aanzien van de eerste restrictie merken wij nog het volgende op. Het feit, dat uitbreiding of inkrimping van het aantal personeelsleden niet mogelijk is, betekent niet dat men de eerstgenoemde restrictie zou moeten schrijven als een gelijkheidsrestrictie. Men kan immers besluiten een bepaald aantal manuren onbenut te laten. Wel moet men de directe loonkosten als vaste kosten beschouwen. Dit houdt in, dat men de behaalde dekking I zal willen maximeren. De doelstellingsfunctie is dus

$$50x_1 + 30x_2 + 60x_3$$

en men wenst deze functie te maximeren.

De oplossing is gegeven in onderstaande tabel:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
z	1	-50	-30	-60	0	0	0	0
x_4	0	3	1	2	1	0	0	2000
x_5	0	1	2	(2)	0	1	0	1400
x_6	0	2	2	1	0	0	1	1500
z	1	-20	30	0	0	30	0	42000
x_4	0	(2)	-1	0	1	-1	0	600
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	700
x_6	0	$1\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	800
z	1	0	20	0	10	20	0	48000
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300
x_3	0	0	$1\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	550
x_6	0	0	$1\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	350

b. In de optimale oplossing bedraagt de dekking voor vaste kosten en winst ƒ 48.000,- per dag. De directe loonkosten bedragen 250 * 160 = ƒ 40.000,- per dag, de kosten voor salarissen van niet direct produktief personeel, de afschrijvingen, de rente en de overige vaste kosten bedragen tesamen ƒ 10.000,-. Het verlies van de onderneming bedraagt dus ƒ 2000,- per dag.
De schaduwprijs van arbeid vinden wij in de z-rij in de kolom van x_4. Deze bedraagt dus ƒ 10,- per direct manuur. Neemt men 1 man extra in dienst dan neemt dus de dekking voor directe loonkosten en overhead toe met ƒ 80,- per dag. De directe loonkosten nemen toe met ƒ 160,-, zodat het verlies toeneemt met ƒ 80,- per dag.
Zou men 1 man kunnen ontslaan, dan neemt het verlies af met ƒ 80,- per dag.

4-2.

a.
$$z - 200x_1 - 300x_2 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1800$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_4 = 3000$$

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RL
1	z	1	-200	-300	0	0	0
	x_3	0	2	(4)	1	0	1800
	x_4	0	4	5	0	1	3000
2	z	1	-50	0	75	0	135000
	x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	450
	x_4	0	($\frac{3}{2}$)	0	$-\frac{5}{4}$	1	750
3	z	1	0	0	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	160000
	x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	200
	x_1	0	1	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	500

b. Zij x_3 = het aantal eenheden, dat men van het produkt C wil gaan produceren. De spelingsvariabelen noemen wij nu x_4 en x_5.
Het LP-model is dan te schrijven als:

$$z - 200x_1 - 300x_2 - 250x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 1800$$
$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 3000$$

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
1	z	1	-200	-300	-250	0	0	0
	x_4	0	2	(4)	4	1	0	1800
	x_5	0	4	5	2	0	1	3000
2	z	1	-50	0	50	75	0	135000
	x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{4}$	0	450
	x_5	0	($\frac{3}{2}$)	0	-3	$-\frac{5}{4}$	1	750
3	z	1	0	0	-50	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	160000
	x_2	0	0	1	(2)	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	200
	x_1	0	1	0	-2	$-\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	500
4	z	1	0	25	0	50	25	165000
	x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	100
	x_1	0	1	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	700

OPMERKING

Bekijken wij bovenstaande tabel, dan zien wij dat de eerste drie tableaus gelijk zijn aan de drie tableaus van het probleem bij vraag a) met dien verstande dat er nu één kolom bijgekomen is.

Bekijken wij nu speciaal het derde tableau, dan zien wij dat de reduced revenue van produkt C in dit derde tableau gelijk is aan 50. Er geldt:

$$50 = 250 - 4 * 33\frac{1}{3} - 2 * 33\frac{1}{3}$$

ofwel: de reduced revenue van produkt C in tableau 3 is gelijk aan de dekkingsbijdrage per eenheid van produkt C verminderd met de opportunity costs, die zouden ontstaan door één eenheid van dat produkt in de oplossing te introduceren. Deze opportunity costs zijn gelijk aan het aantal uren van afdeling I, die men zou moeten prijsgeven om één eenheid van produkt C te kunnen maken vermenigvuldigd met de scha-

duwprijs per uur van afdeling I in tableau 3 plus het aantal uren van afdeling II, die men zou moeten prijsgeven om één eenheid van produkt C te kunnen maken vermenigvuldigd met de schaduwprijs per uur van afdeling II in tableau 3.
Bekijken wij nu nog eens het laatste tableau van het probleem van vraag a), dan zien wij dat dit tableau ook reeds de gegevens bevat, die wij nodig hebben om de reduced revenue van het nieuwe produkt C te kunnen berekenen. De enige gegevens, die wij hiervoor nodig hebben zijn de schaduwprijzen per uur van de afdelingen I en II en de gegevens die over produkt C bij de formulering van vraag b) werden gegeven.
Dàt produkt C in de optimale oplossing zou worden opgenomen, hadden wij dus ook kunnen afleiden zonder het probleem voor vraag b) opnieuw met de simplex-methode op te lossen.
Wel moeten wij het probleem opnieuw nu voor 3 produkten met behulp van de simplex-methode oplossen om te bepalen hoevéél stuks van produkt C wij zullen moeten gaan maken en tevens om te bepalen welk produkt (A of B) nu de optimale oplossing verlaat.

c. De reduced revenue van produkt B in het laatste tableau is - ƒ 25,-.
Door een eenheid van produkt B in de oplossing te introduceren neemt dus de behaalde dekking af met ƒ 25,-.

4-3. a. Het LP-model is:

maximeer $160x_1 + 200x_2$

onder de voorwaarden

$3x_1 + x_2 \leqq 160$	(1)	houtafdeling
$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \leqq 40$	(2)	spuiterij
$2x_1 + 2x_2 \leqq 120$	(3)	montage
$x_2 \leqq 45$	(4)	bankwerkerij

$x_1, x_2 \geqq 0$

De oplossing is gegeven in de tabel op p.155.

b. Bij de houtafdeling hoort spelingsvariabele x_3. In de optimale oplossing geldt $x_3 = 60$. In de houtafdeling zijn dan 60 uren niet benut.
Bij de spuiterij hoort spelingsvariabele x_4. De schaduwprijs van één arbeidsuur in de spuiterij bedraagt ƒ 100,-.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
1	z	1	-160	-200	0	0	0	0	0
	x_3	0	3	1	1	0	0	0	160
	x_4	0	2/5	4/5	0	1	0	0	40
	x_5	0	2	2	0	0	1	0	120
	x_6	0	0	(1)	0	0	0	1	45
2	z	1	-160	0	0	0	0	200	9 000
	x_3	0	3	0	1	0	0	-1	115
	x_4	0	(2/5)	0	0	1	0	-4/5	4
	x_5	0	2	0	0	0	1	-2	30
	x_2	0	0	1	0	0	0	1	45
3	z	1	0	0	0	400	0	-120	10 600
	x_3	0	0	0	1	-7½	0	5	85
	x_1	0	1	0	0	2½	0	-2	10
	x_5	0	0	0	0	-5	1	(2)	10
	x_2	0	0	1	0	0	0	1	45
4	z	1	0	0	0	100	60	0	11 200
	x_3	0	0	0	1	5	-2½	0	60
	x_1	0	1	0	0	-2½	-1	0	20
	x_6	0	0	0	0	-2½	½	1	5
	x_2	0	0	1	0	2½	-½	0	40

c. De nieuwe stoeltjesklok vraagt 2 uur arbeid van de houtafdeling, 0,8 uur arbeid van de spuiterij en 2 uur van de montage. De reduced revenue van de nieuwe stoeltjesklok wordt dus
240 - 2*0 - 0,8*100 - 2*60 = 40.
Deze reduced revenue is positief. Het is dus aantrekkelijk om het nieuwe type stoeltjesklok in het produktieprogramma op te nemen.

d. De oplossing is gegeven in de tabel op p.156.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RL
1	z	1	-160	-200	-240	0	0	0	0	0
	x_4	0	3	1	2	1	0	0	0	160
	x_5	0	0,4	0,8	0,8	0	1	0	0	40
	x_6	0	2	2	2	0	0	1	0	120
	x_7	0	0	1	(1)	0	0	0	1	45
2	z	1	-160	40	0	0	0	0	240	10 800
	x_4	0	3	-1	0	1	0	0	-2	70
	x_5	0	(0,4)	0	0	0	1	0	-0,8	4
	x_6	0	2	0	0	0	0	1	-2	30
	x_3	0	0	1	1	0	0	0	1	45
3	z	1	0	40	0	0	400	0	-80	12 400
	x_4	0	0	-1	0	1	$-7\frac{1}{2}$	0	4	40
	x_1	0	1	0	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	-2	10
	x_6	0	0	0	0	0	-5	1	(2)	10
	x_3	0	0	1	1	0	0	0	1	45
4	z	1	0	40	0	0	200	40	0	12 800
	x_4	0	0	-1	0	1	$2\frac{1}{2}$	-2	0	20
	x_1	0	1	0	0	0	$-2\frac{1}{2}$	1	0	20
	x_7	0	0	0	0	0	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5
	x_3	0	0	1	1	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	40

4-4. Het LP-model is:

maximeer $160x_1 + 200x_2 + 240x_3 + 60x_4$

onder de voorwaarden

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqq 160$$
$$0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,8x_3 \leqq 40$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqq 120$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \leqq 45$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$$

De oplossing is gegeven in de tabel op p.157.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RL
1	z	1	-160	-200	-240	-60	0	0	0	0	0
	x_5	0	3	1	2	0	1	0	0	0	160
	x_6	0	0,4	0,8	0,8	0	0	1	0	0	40
	x_7	0	2	2	2	0	0	0	1	0	120
	x_8	0	0	1	(1)	1	0	0	0	1	45
2	z	1	-160	40	0	180	0	0	0	240	10 800
	x_5	0	3	-1	0	-2	1	0	0	-2	70
	x_6	0	(0,4)	0	0	-0,8	0	1	0	-0,8	4
	x_7	0	2	0	0	-2	0	0	1	-2	30
	x_3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	45
3	z	1	0	40	0	-140	0	400	0	-80	12 400
	x_5	0	0	-1	0	4	1	$-7\frac{1}{2}$	0	4	40
	x_1	0	1	0	0	-2	0	$2\frac{1}{2}$	0	-2	10
	x_7	0	0	0	0	(2)	0	-5	1	2	10
	x_3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	45
4	z	1	0	40	0	0	0	50	70	60	13 100
	x_5	0	0	-1	0	0	1	$2\frac{1}{2}$	-2	0	20
	x_1	0	1	0	0	0	0	$-2\frac{1}{2}$	1	0	20
	x_4	0	0	0	0	1	0	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5
	x_3	0	0	1	1	0	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	40

Opmerking. Deze oplossing is nagenoeg gelijk aan de oplossing van vraagstuk 4-3. In het optimum worden 20 staartklokken en 40 stoeltjesklokken nieuwe stijl geproduceerd, net als bij de oplossing van vraagstuk 4-3. Voorts worden nog 5 uurwerken per week verkocht; in de oplossing van vraagstuk 4-3 werden alleen uurwerken voor eigen gebruik geproduceerd en was er in de bankwerkerij een onbenutte capaciteit van vijf uurwerken per week.

b. De schaduwprijs van één arbeidsuur in de spuiterij bedraagt nu *f* 50,-.

4-5. Noem x_1 het aantal hectaren, die ingezaaid worden met gewas A. Eén hectare ingezaaid met gewas A levert 2 ton verkoopbaar produkt A van gewas A. Eén hectare ingezaaid met gewas A geeft dus een opbrengst van 2*800 = ƒ 1600,-. De variabele kosten bedragen voor één hectare ingezaaid met gewas A ƒ 100,-. De contributiemarge bedraagt dus voor één hectare ingezaaid met gewas A ƒ 1500,-. De contributiemarge voor één hectare ingezaaid met gewas B bedraagt 1,8 * 475 - 55 = 800. Een hectare ingezaaid met gewas C geeft een contributiemarge van 1,6 * 750 - 35 = 1165.
De doelstellingsfunctie is dus $1500x_1 + 800x_2 + 1165x_3$.
Er zijn twee randvoorwaarden:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq 60 \quad \text{(grond, in hectare)}$$

$$30x_1 + 10x_2 + 15x_3 \leqq 1000 \quad \text{(arbeid, in uren)}$$

terwijl voorts moet gelden $x_1, x_2, x_3 \geqq 0$.

De oplossing is gegeven in onderstaande tabel.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
1	z	1	-1500	-800	-1165	0	0	0
	x_4	0	1	1	1	1	0	60
	x_5	0	20	10	15	0	1	1 000
2	z	1	0	-50	-40	0	75	75 000
	x_4	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	-1/20	10
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	1/20	50
3	z	1	0	0	-15	100	70	76 000
	x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	2	-1/10	20
	x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	1/10	40
4	z	1	0	30	0	160	67	76 600
	x_3	0	0	2	1	4	-1/5	40
	x_1	0	1	-1	0	-3	1/5	20

Opmerking. Een andere modelformulering verkrijgt men door x_1 te definiëren als het aantal ton van produkt A dat de boer wenst te verbouwen (en evenzo x_1 en x_2 als het aantal tonnen van B respectievelijk C). Het model luidt dan:

maximeer $750x_1 + 444,44x_2 + 728,12x_3$

onder de voorwaarden

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{1,8} + \frac{x_3}{1,6} \leqq 60$$

$$\frac{20}{2} x_1 + \frac{10}{1,8} x_2 + \frac{15}{1,6} x_3 \leqq 1000$$

5-1. a. Wij beschouwen een hoeveelheid van 100 ml van het nieuwe haarwater. Stel deze 100 ml bestaat uit $x_1$ml A + $x_2$ml B + $x_3$ml C. Er geldt dus:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Verder moet gelden

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40$$

$$x_1 \qquad + x_3 \geq 60$$

Het model luidt dus:
minimeer

$$0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,5x_3$$

onder de voorwaarden

$$\begin{array}{llr} x_1 + x_2 + x_3 = 100 & & \text{I} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 & & \text{II} \\ x_1 \qquad + x_3 \geq 60 & & \text{III} \\ x_1, x_2, x_3 \geqq 0 & & \end{array}$$

Aan de tweede en derde restrictie voegen wij de surplusvariabelen x_4 en x_5 toe. Aan alle drie de restricties voegen wij een kunstmatige variabele toe (x_6, x_7 en x_8). Het model luidt nu:
minimeer

$$0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,5x_3 \qquad + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8$$

onder de voorwaarden

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad = 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad\qquad + x_7 \qquad = 40 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad - x_5 \qquad\qquad + x_8 = 60 \end{array}$$

De oplossing is gegeven in onderstaande tabel:

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RL
	z	1	-0,3	-0,2	-0,5	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	(x_6)	0	1	1	1	0	0	1	0	0	100
	(x_7)	0	1	1	2	-1	0	0	1	0	40
	(x_8)	0	1	0	1	0	-1	0	0	1	60
	z	1	-0,3	-0,2	-0,5	0	0	0	0	0	0
		0	3	2	4	-1	-1	0	0	0	200
1	x_6	0	1	1	1	0	0	1	0	0	100
	x_7	0	1	1	2	-1	0	0	1	0	40
	x_8	0	1	0	1	0	-1	0	0	1	60
	z	1	-0,05	0,05	0	-0,25	0	0	.	0	10
		0	1	0	0	1	-1	0	.	0	120
2	x_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	.	0	80
	x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	.	0	20
	x_8	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	.	1	40
	z	1	0	0,1	0,1	-0,3	0	0	.	0	12
		0	0	-1	-2	2	-1	0	.	0	80
3	x_6	0	0	0	-1	1	0	1	.	0	60
	x_1	0	1	1	2	-1	0	0	.	0	40
	x_8	0	0	-1	-1	1	-1	0	.	1	20
	z	1	0	-0,2	-0,2	0	-0,3	0	.	.	18
		0	0	1	0	0	1	0	.	.	40
4	x_6	0	0	1	0	0	1	1	.	.	40
	x_1	0	1	0	1	0	-1	0	.	.	60
	x_4	0	0	-1	-1	1	-1	0	.	.	20
	z	1	0	0	-0,2	0	-0,1	.	.	.	26
		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	x_2	0	0	1	0	0	1	.	.	.	40
	x_1	0	1	0	1	0	-1	.	.	.	60
	x_4	0	0	0	-1	1	0	.	.	.	60

b. De schaduwprijs van restrictie III vinden wij in de z-rij in de kolom van x_5. Deze bedraagt 0,1 cent per mg. Door te eisen dat 100 ml van het nieuwe boorwater 61 mg anti-haaruitvalmiddel moet bevatten, stijgen de grondstofkosten van 26 cent per 100 ml tot 26,1 cent per 100 ml.

Opmerking. Men kan het onder a. geformuleerde model vereenvoudigen door $x_3 = 100 - x_1 - x_2$ te substitueren in de restricties II en III en in de doelstellingsfunctie. De doelstellingsfunctie wordt dan:

minimeer $0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5(100-x_1-x_2)$

en dit kan men ook schrijven als

maximeer $0{,}2x_1 + 0{,}3x_2$

De restricties luiden dan

$$x_1 + x_2 \leqq 160 \qquad \text{II}$$

$$x_2 \leqq 40 \qquad \text{III}$$

$$x_1,\ x_2 \geqq 0$$

terwijl de restrictie $x_3 \geqq 0$ overgaat in $100-x_1-x_2 \geqq 0$, dus $x_1 + x_2 \leqq 100$. Men ziet nu direct dat restrictie II overbodig is. Het vereenvoudigde model luidt dus:

maximeer $0{,}2x_1 + 0{,}3x_2$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 \leqq 100$$

$$x_2 \leqq 40$$

5-2. Het model luidt:

minimeer $4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4$

onder de voorwaarden

$$4x_1 + 2x_3 + x_4 \geqq 50$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geqq 40$$

$$2x_3 + 2x_4 \geqq 10$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0$$

Na toevoeging van surplusvariabelen en kunstmatige variabelen luidt het probleem:

minimeer $4x_1 + x_2 + x_3 + Mx_8 + Mx_9 + Mx_{10}$

onder de voorwaarden

$$4x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_8 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 + x_9 = 0$$

$$2x_3 + 2x_4 - x_7 + x_{10} = 0$$

De oplossing is gegeven in de tabel op p.162.

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	RL
	z	1	-4	-1	-1	-4	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	(x_8)	0	4	0	2	1	-1	0	0	1	0	0	50
	(x_9)	0	2	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	40
	(x_{10})	0	0	0	2	2	0	0	-1	0	0	1	10
	z	1	-4	-1	-1	-4	0	0	0	0	0	0	0
		0	6	1	5	3	-1	-1	-1	0	0	0	100
1	x_8	0	**4**	0	2	1	-1	0	0	1	0	0	50
	x_9	0	2	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	40
	x_{10}	0	0	0	2	2	0	0	-1	0	0	1	10
	z	1	0	-1	1	-3	-1	0	0	·	0	0	50
		0	0	1	2	3/2	½	-1	-1	·	0	0	25
2	x_1	0	1	0	½	¼	-¼	0	0	·	0	0	12½
	x_9	0	0	1	0	-½	½	-1	0	·	1	0	15
	x_{10}	0	0	0	**2**	2	0	0	-1	·	0	1	10
	z	1	0	-1	0	-4	-1	0	½	·	0	·	45
		0	0	1	0	-½	½	-1	0	·	0	·	15
3	x_1	0	1	0	0	-¼	-¼	0	¼	·	0	·	10
	x_9	0	0	**1**	0	-½	½	-1	0	·	1	·	15
	x_3	0	0	0	1	1	0	0	-½	·	0	·	5
	z	1	0	0	0	-4½	-½	-1	½	·	·	·	60
		0	0	0	0	0	0	0	0	·	·	·	0
4	x_1	0	1	0	0	-¼	-¼	0	**¼**	·	·	·	10
	x_2	0	0	1	0	-½	½	-1	0	·	·	·	15
	x_3	0	0	0	1	1	0	0	-½	·	·	·	5
	z	1	-2	0	0	-4	0	-1	0	·	·	·	40
		·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	x_7	0	4	0	0	-1	-1	0	1	·	·	·	40
	x_2	0	0	1	0	-½	½	-1	0	·	·	·	15
	x_3	0	2	0	1	½	-½	0	0	·	·	·	25

5-3. Laat men de restricties (1) en (3) weg, dan luidt het model:

maximeer $200x_1 + 400x_2$

onder de voorwaarden:

$$\frac{1}{8}x_1 + x_2 \leqq 7\,000$$
$$3x_1 + 4x_2 \leqq 40\,000$$
$$-\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 \geqq 100$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

Na toevoeging van spelingsvariabelen en een surplusvariabele en een kunstmatige variabele luidt het model:

maximeer $200x_1 + 400x_2 \qquad -Mx_6$

onder de voorwaarden

$$\frac{1}{8}x_1 + x_2 + x_3 = 7\,000$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 40\,000$$

$$-\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1\,000$$

De oplossing is gegeven in onderstaande tabel:

Tableau	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RL
	z	1	-200	-400	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	1	0
0	x_3	0	1/8	1	1	0	0	0	7 000
	x_4	0	3	4	0	1	0	0	40 000
	(x_6)	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	-1	1	1 000
	z	1	-200	-400	0	0	0	0	0
		0	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	1	0	-1 000
1	x_3	0	1/8	1	1	0	0	0	7 000
	x_4	0	3	4	0	1	0	0	40 000
	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	(1)	0	0	-1	1	1 000
	z	1	-400	0	0	0	-400	•	400 000
		0	0	0	0	0	0	•	0
2	x_3	0	5/8	0	1	0	1	•	6 000
	x_4	0	(5)	0	0	1	4	•	36 000
	x_2	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	-1	•	1 000
	z	1	0	0	0	80	-80	•	3 280 000
		•	•	•	•	•	•	•	•
3	x_3	0	0	0	1	-1/8	($\frac{1}{2}$)	•	1 500
	x_1	0	1	0	0	1/5	4/5	•	7 200
	x_2	0	0	1	0	1/10	-3/5	•	4 600
	z	1	0	0	160	60	0	•	3 520 000
		•	•	•	•	•	•	•	•
4	x_5	0	0	0	2	$-\frac{1}{4}$	1	•	3 000
	x_1	0	1	0	-8/5	2/5	0	•	4 800
	x_2	0	0	1	6/5	-1/20	0	•	6 400

6-1. Het duale probleem is:

minimeer $1800u_1 + 300u_2$

onder de voorwaarden

$2u_1 + 4u_2 \geqq 200$ (A)

$4u_1 + 5u_2 \geqq 300$ (B)

$u_1, u_2 \geqq 0$

De duale variabelen u_1 respectievelijk u_2 kan men opvatten als de prijzen, die een buitenstaander zou willen betalen voor het huren van één arbeidsuur van afdeling I respectievelijk afdeling II.

Restrictie (A) kan men als volgt interpreteren: als de prijzen u_1 en u_2 zodanig zijn, dat voldaan is aan restrictie (A), dan is het voor de oorspronkelijke ondernemer niet meer aantrekkelijk om produkt A te fabriceren. Een soortgelijke interpretatie geldt voor restrictie (B).
De doelstellingsfunctie geeft het totale bedrag, dat de buitenstaander moet betalen voor het huren van alle produktiecapaciteit. De buitenstaander wenst dit bedrag te minimeren.

Voegt met aan bovenstaand model surplusvariabelen en kunstmatige variabelen toe, dan luidt het:

minimeer $1800u_1 + 300\,u_2 + Mu_5 + Mu_6$

onder de voorwaarden

$2u_1 + 4u_2 - u_3 + u_5 = 200$

$4u_1 + 5u_2 - u_4 + u_6 = 300$

De oplossing is gegeven in de tabel op p.165.

6-2. Het oorspronkelijke probleem is:

minimeer $3x_1 + 5x_2$

onder de voorwaarden

$x_1 + x_2 \geqq 6$

$x_1 + 2x_2 \geqq 8$

$x_1, x_2 \geqq 0$

In primale vorm geschreven is dit:

maximeer $-3x_1 - 5x_2$

Tableau	Basis	z	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	RL
	z	1	-1800	-3000	0	0	0	0	0
0		0	0	0	0	0	-1	-1	0
	(u_5)	0	2	4	-1	0	1	0	200
	(u_6)	0	4	5	0	-1	0	1	300
	z	1	-1800	-3000	0	0	0	0	0
1		0	6	9	-1	-1	0	0	500
	u_5	0	2	(4)	-1	0	1	0	200
	u_6	0	4	5	0	-1	0	1	300
	z	1	-300	0	-750	0	•	0	150 000
2		0	3/2	0	$1\frac{1}{4}$	-1	•	0	50
	u_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	•	0	50
	u_6	0	(3/2)	0	$1\frac{1}{4}$	-1	•	1	50
	z	1	0	0	-500	-200	•	•	160 000
3		•	•	•	•	•	•	•	•
	u_2	0	0	1	-2/3	1/3	•	•	33 1/3
	u_1	0	1	0	5/6	-2/3	•	•	33 1/3

onder de voorwaarden

$-x_1 - x_2 \leqq -6$

$-x_1 - 2x_2 \leqq -8$

$x_1, x_2 \geqq 0$

Het duale probleem luidt:

minimeer $-6u_1 - 8u_2$

onder de voorwaarden

$-u_1 - u_2 \geqq -3$

$-u_1 - 2u_2 \geqq -5$

$u_1, u_2 \geqq 0$

Dit kan ook worden geschreven als

maximeer $6u_1 + 8u_2$

onder de voorwaarden

$u_1 + u_2 \leqq 3$

$u_1 + 2u_2 \leqq 5$

$u_1, u_2 \geqq 0$

De oplossing is gegeven in onderstaande tabel:

Tableau	Basis	z	u_1	u_2	u_3	u_4	RL
1	z	1	-6	-8	0	0	0
	u_3	0	1	1	1	0	3
	u_4	0	1	(2)	0	1	5
2	z	1	-2	0	0	4	20
	u_3	0	($\frac{1}{2}$)	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	u_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	5/2
3	z	1	0	0	4	2	22
	u_1	0	1	0	2	-1	1
	u_2	0	0	1	-1	1	2

6-3. Het duale probleem is:

maximeer $50u_1 + 40u_2 + 10u_3$

onder de voorwaarden

$4u_1 + 2u_2 \leqq 4$

$u_2 \leqq 1$

$2u_1 + u_2 + 2u_3 \leqq 1$

$u_1 + 2u_3 \leqq 4$

$u_1, u_2, u_3 \geqq 0$

De oplossing is gegeven in de tabel op p.167.

Tableau	Basis	z	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	RL
1	z	1	-50	-40	-10	0	0	0	0	0
	u_4	0	4	2	0	1	0	0	0	4
	u_5	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	u_6	0	(2)	1	2	0	0	1	0	1
	u_7	0	1	0	2	0	0	0	1	4
2	z	1	0	-15	40	0	0	25	0	25
	u_4	0	0	0	-4	1	0	-2	0	2
	u_5	0	0	(1)	0	0	1	0	0	1
	u_1	0	1	½	1	0	0	½	0	½
	u_7	0	0	-½	1	0	0	-½	1	3½
3	z	1	0	0	40	0	15	25	0	40
	u_4	0	0	0	-4	1	0	-2	0	2
	u_2	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	u_1	0	1	0	1	0	-½	½	0	0
	u_7	0	0	0	1	0	½	-½	1	4

6-4. a. De primale vorm is:

maximeer $-10x_1 - 14x_2 - 5x_3$

onder de voorwaarden

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leqq -16$$
$$-5x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq -12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \leqq 20$$
$$-x_1 - x_2 - 4x_3 \leqq -20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

b. Het duale probleem is:

minimeer $-16u_1 - 12u_2 + 20u_3 - 20u_4$

onder de voorwaarden

$$-u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 \geqq -10$$
$$u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \geqq -14$$
$$-2u_1 - 3u_2 + 4u_3 - 4u_4 \geqq -5$$
$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geqq 0$$

Men kan dit probleem ook schrijven als:

maximeer $16u_1 + 12u_2 - 20u_3 + 20u_4$

onder de voorwaarden

$$u_1 + 5u_2 - u_3 + u_4 \leqq 10$$
$$-u_1 - u_2 - u_3 + u_4 \leqq 14$$
$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 + 4u_4 \leqq 5$$
$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geqq 0$$

7-1. a. De schaduwprijs van één manuur bedraagt *f* 10,-. Door één man te ontslaan zou men het verlies kunnen reduceren tot *f* 80,- per dag. Het totale verlies bedraagt *f* 2000,- per dag. Door 25 man te ontslaan kan men dus inderdaad het verlies tot nul reduceren, mits de range waarbinnen de schaduwprijs van arbeid gelijk blijft aan *f* 10,- per uur voldoende groot is.
Deze range wordt bepaald door:

$$\max\left(\frac{-300}{\frac{1}{2}}\right) < \Delta b_1 < \min\left(\frac{-550}{-\frac{1}{4}}, \frac{-350}{-\frac{3}{4}}\right)$$

ofwel

$$-600 < \Delta b_1 < 466\tfrac{2}{3}$$

ofwel

$$1400 < b_1 < 2466\tfrac{2}{3}$$

Door het ontslag van 25 man zou het aantal directe manuren dalen tot 1800. Dit ligt binnen de boven berekende range, zodat men mag concluderen, dat de schaduwprijs van arbeid *f* 10,- blijft als men 25 man zou ontslaan.

b. De range van c_1 wordt bepaald door

$$\max\left(\frac{-10}{\frac{1}{2}}\right) < \Delta c_1 < \min\left(\frac{-20}{-\frac{1}{2}}, \frac{-20}{-\frac{1}{2}}\right)$$

ofwel

$$-20 < \Delta c_1 < 40$$

ofwel

$$30 < c_1 < 90$$

Aangezien $c_1 = 40$ binnen het interval $30 < c_1 < 90$ ligt, verandert de optimale oplossing niet. Wel neemt de behaalde dekking af met 300 * 10 = ƒ 3000,-. Het verlies neemt hierdoor toe van ƒ 2000,- per dag tot ƒ 5000,- per dag.

c. De reduced revenue van produkt B in het laatste simplextableau is -ƒ 20,-. Pas als de dekkingsbijdrage van produkt B groter is dan ƒ 50,- per eenheid, wordt produkt B in het optimale produktiepakket opgenomen. De verkoopprijs van produkt B zou dus tenminste ƒ 120,- moeten bedragen.

7-2. a. De reduced revenue van produkt B is -ƒ 25,-. Als de dekkingsbijdrage van produkt B toeneemt met ƒ 30,-, wordt produkt B dus in het optimale produktiepakket opgenomen.

b. De range van c_3 wordt bepaald door

$$\max\left(\frac{-25}{\frac{1}{2}}, \frac{-50}{1/3}\right) < \Delta c_3 < \min\left(\frac{-25}{-1/6}\right)$$

ofwel

$$-50 < \Delta c_3 < 150$$

ofwel

$$200 < c_3 < 400$$

De nieuwe waarde $c_3 = 225$ ligt binnen bovenstaand interval. De samenstelling van het optimale produktieprogramma verandert dus niet als de dekkingsbijdrage van produkt C daalt van ƒ 250,- tot ƒ 225,-.
De in totaal behaalde dekking daalt daardoor wel, en wel met 100 * 25 = ƒ 2500,-. Als de dekkingsbijdrage van produkt C ƒ 225,- is, bedraagt de in totaal behaalde dekking dus ƒ 14.000,-.

c. De schaduwprijs van een arbeidsuur in afdeling II bedraagt ƒ 25,-. Om te bepalen of de schaduwprijs constant blijft als de capaciteit van afdeling II toeneemt van 3000 tot 3500 uur, berekenen wij de range of feasibility:

$$\frac{-700}{1/3} < \Delta b_2 < \frac{-100}{-1/6}$$

$$-2100 < \Delta b_2 < 600$$

ofwel

$$900 < b_2 < 3600$$

Als b_2 toeneemt van 3000 tot 3500 blijft de schaduwprijs dus constant; de in totaal behaalde dekkingsbijdrage neemt door de

vergroting van de capaciteit van afdeling II toe met 500 * 25 = ƒ 12.500,-.
Als b_2 toeneemt van 3000 tot 4000 kan men met de gegevens uit het in de opgave gegeven laatste simplex-tableau niet berekenen met welk bedrag de in totaal behaalde dekkingsbijdrage toeneemt.

8-1. a. Het LP-model is:

maximeer $1500x_1 + 800x_2 + 1165x_3$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq 60$$
$$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 \leqq b_2$$

Dit probleem moeten wij oplossen voor verschillende waarden van b_2, die voldoen aan $0 \leqq b_2 \leqq 1500$.
Voor $b_2 = 1000$ is dit probleem al opgelost in vraagstuk 4-5
Er geldt dan z = 76 600, terwijl de schaduwprijs van één arbeidsuur ƒ 67,- bedraagt. De range of feasibility wordt bepaald door

$$\frac{-20}{1/5} < \Delta b_2 < \frac{-40}{-1/5}$$

ofwel $-100 < \Delta b_2 < 200$ ofwel $900 < b_2 < 1200$.

Wij kiezen nu een waarde van b_2 groter dan 1200, maar kleiner dan 1500, bijvoorbeeld $b_2 = 1300$. Door het probleem opnieuw op te lossen vinden wij z = 90 000, de schaduwprijs van een uur arbeid is nul en de range of feasibility is $b_2 > 1200$.
Wij kiezen nu een waarde voor b_2, die voldoet aan $0 < b_2 < 900$, bijvoorbeeld $b_2 = 800$. Bij $b_2 = 800$ vinden wij z = 62 600, de schaduwprijs voor één uur arbeid is ƒ 73,- en de range of feasibility is $600 < b_2 < 900$.
Wij kiezen nu een waarde voor b_2, die voldoet aan $0 < b_2 < 600$, bijvoorbeeld $b_2 = 500$. Bij $b_2 = 500$ vinden wij z = 40 000, de schaduwprijs van één uur arbeid is ƒ 80,- en de range of feasibility is $0 < b_2 < 600$.

Samenvattend hebben wij nu gevonden:

b_2	z	schaduwprijs	range of feasibility
500	40 000	80	$0 < b_2 < 600$
800	62 600	73	$600 < b_2 < 900$
1000	76 600	67	$900 < b_2 < 1200$
1300	90 000	0	$b_2 > 1200$

Om de grafiek te kunnen tekenen bepalen wij de waarde van z voor die waarden van b_2, die overeenkomen met de grenzen van de ranges of feasibility, dus voor b_2 = 0, 600, 900 en 1200.
Voor $b_2 = 0$ geldt $z = 0$.
Voor $b_2 = 600$ kunnen wij de waarde van z op twee manieren berekenen, namelijk ten eerste door uit te gaan van de waarde van z voor $b_2 = 500$ en ten tweede door uit te gaan van de waarde van z voor $b_2 = 800$ (dit geeft dus een controle op mogelijke rekenfouten). Wij vinden dan

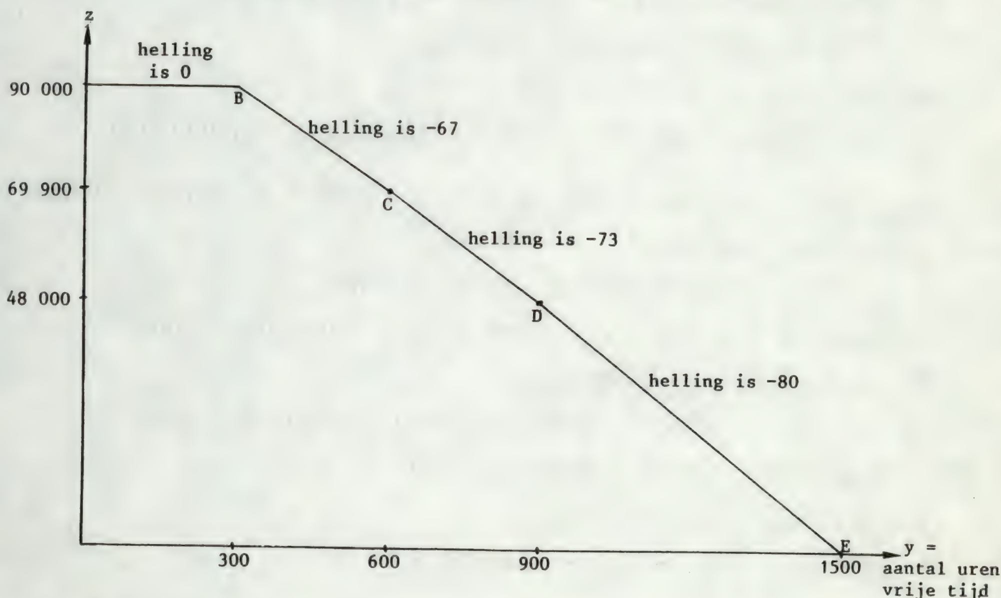
$$z = 40\ 000 + 100 * 80 = 48\ 000$$

en $z = 62\ 600 - 200 * 73 = 48\ 000$.

Na soortgelijke berekeningen voor $b_2 = 900$ en $b_2 = 1200$, hebben wij gevonden:

b_2	z
0	0
600	48 000
900	69 900
1200	90 000

Aangezien geldt $b_2 = 1500 - y$ hebben wij nu ook de functie z(y) gevonden. Deze is geschetst in onderstaande figuur.



b. De verzameling van efficiënte oplossingen is het gebroken lijnstuk BCDE.

9-1. a. Bij het vertalen van een praktijkprobleem in een LP-model is het meestal verstandig te beginnen met het aangeven van de beslissingsvariabelen, die men in het model wenst op te nemen. Daarbij zijn dikwijls verschillende mogelijkheden.
In dit geval kan men als beslissingsvariabelen kiezen:

C_i = het aantal in periode i te produceren caravans

I_i = de toeneming van het aantal werknemers aan het begin van periode i

K_i = de afneming van het aantal werknemers aan het begin van periode i.

Heeft men eenmaal vastgesteld hoeveel caravans men in periode i wil produceren, dan ligt de voorraad aan het einde van periode i vast. De voorraad aan het einde van periode i behoeft men dus niet op te nemen als beslissingsvariabele. Hetzelfde geldt voor "het aantal werknemers gedurende periode i".

Wij formuleren nu eerst de doelstellingsfunctie.

Loonkosten: Het aantal werknemers gedurende de drie perioden bedraagt:

periode 1 : $200 + I_1 - K_1$

periode 2 : $200 + I_1 - K_1 + I_2 - K_2$

periode 3 : $200 + I_1 - K_1 + I_2 - K_2 + I_3 - K_3$

De loonkosten bedragen dus in totaal:

$$10\,000(200+I_1-K_1) + 10\,000(200+I_1-K_1+I_2-K_2) +$$
$$+ 10\,000(200+I_1-K_1+I_2-K_2+I_3-K_3)$$

Dit kan men herschrijven als

$$10\,000(3I_1 + 2I_2 + I_3 - 3K_1 - 2K_2 - K_3) + 6\,000\,000$$

Voorraadkosten: De voorraad caravans bedraagt aan het einde van

periode 1 : $200 + C_1 - 600$

periode 2 : $200 + C_1 - 600 + C_2 - 800$

periode 3 : $200 + C_1 - 600 + C_2 - 800 + C_3 - 2000$

De voorraadkosten bedragen:

$$180(200+C_1-600) + 180(200+C_1-600+C_2-800) +$$
$$+ 180(200+C_1-600+C_2-800+C_3-2000)$$

Dit kan men herschrijven als

$$180(3C_1 + 2C_2 + C_3) - 864\,000$$

<u>Afvloeiingskosten en wervingskosten</u>. Deze bedragen

$$15\,000(K_1 + K_2 + K_3) + 1\,000(I_1 + I_2 + I_3)$$

De doelstellingsfunctie luidt dus (de constante term laten wij weg):

$$\text{minimeer } 540C_1 + 360C_2 + 180C_3 + 31\,000\ I_1 + 21\,000\ I_2 + $$
$$+ 11\,000\ I_3 - 15\,000\ K_1 - 5\,000\ K_2 + 5\,000\ K_3$$

Wij formuleren nu de restricties. Er zijn twee typen restricties, namelijk capaciteitsrestricties en vraagrestricties. De capaciteitsrestricties zijn:

$$\text{CAP1} : 80C_1 \leqq (200+I_1-K_1).580$$
$$\text{CAP2} : 80C_2 \leqq (200+I_1-K_1+I_2-K_2).580$$
$$\text{CAP3} : 80C_3 \leqq (200+I_1-K_1+I_2-K_2+I_3-K_3).500$$

De vraagrestricties luiden:

$$\text{DEC1} : 200+C_1-600 \geqq 0$$
$$\text{DEC2} : 200+C_1-600+C_2-800 \geqq 0$$
$$\text{DEC3} : 200+C_1-600+C_2-800+C_3-2000 \geqq 200$$

Na herschrijven luiden de restricties:

$$\text{CAP1} : 80C_1 - 580I_1 + 580K_1 \leqq 116\,000$$
$$\text{CAP2} : 80C_2 - 580I_1 - 580I_2 + 580K_1 + 580K_2 \leqq 116\,000$$
$$\text{CAP3} : 80C_3 - 580I_1 - 580I_2 - 500I_3 + 580K_1 + 580K_2 +$$
$$+ 500K_3 \leqq 10\,000$$
$$\text{DEC1} : C_1 \geqq 400$$
$$\text{DEC2} : C_1 + C_2 \geqq 1200$$
$$\text{DEC3} : C_1 + C_2 + C_3 \geqq 3400$$

9-2. a. Wij kiezen als beslissingsvariabelen:

C_i = het aantal in periode i te produceren caravans
D_i = het aantal in periode i te produceren direktieketen
A_i = het aantal werknemers in éénploegendienst in periode i
B_i = het aantal werknemers in tweeploegendienst in periode i
I_i = de toeneming van het aantal werknemers aan het begin van periode i
K_i = de afneming van het aantal werknemers aan het begin van periode i

O_i = het aantal gewerkte overuren in periode i

b. De loonkosten bedragen inclusief ploegentoeslag:

$10\,000(A_1+A_2+A_3) + 12\,500(B_1+B_2+B_3)$

De kosten van ontslag en van werving van personeel zijn:

$15\,000(K_1+K_2+K_3) + 1000(I_1+I_2+I_3)$

De overwerkkosten bedragen: $30(O_1+O_2+O_3)$

De voorraadkosten bedragen:

$540C_1 + 360C_2 + 180C_3 + 480D_1 + 320D_2 + 160D_3$ - een constante

De doelstellingsfunctie is:

minimeer

$$10\,000(A_1+A_2+A_3) + 12\,500(B_1+B_2+B_3) + 15\,000(K_1+K_2+K_3) +$$
$$+ 1000(I_1+I_2+I_3) + 30(O_1+O_2+O_3) + 540C_1 + 360C_2 + 180C_3 +$$
$$+ 480D_1 + 320D_2 + 160D_3$$

c. Er zijn:
- capaciteitsrestricties: de produktiecapaciteit wordt begrensd door het aantal beschikbare arbeidsuren. Noem deze capaciteitsrestricties CAP1, CAP2 en CAP3.
- vraagrestricties: men moet tenminste zoveel caravans en direktieketen produceren dat aan de vraag kan worden voldaan. Noem deze restricties DEC1, DEC2, DEC3, DED1, DED2 en DED3.
- overwerkrestricties: het aantal overgewerkte uren per periode mag niet groter zijn dan 20% van de in die periode in de normale werktijd beschikbare uren. Noem deze restricties OVE1, OVE2 en OVE3.
- ploegendienstrestricties: ten hoogste 1/3 deel van het aantal werknemers is bereid in tweeploegendienst te werken. Noem deze restricties PLO1, PLO2 en PLO3.
- ruimterestricties: in de fabriek kunnen ten hoogste 300 personeelsleden tegelijk werken. Noem deze restricties RUI1, RUI2 en RUI3.
- definitierestricties, die A_i, B_i, I_i en K_i aan elkaar relateren. Noem deze restricties VAW1, VAW2 en VAW3.

d. De restricties luiden als volgt:

CAP1 : $80C_1 + 60D_1 \leqq 580A_1 + 580B_1 + O_1$

CAP2 : $80C_2 + 60D_2 \leqq 580A_2 + 580B_2 + O_2$

CAP3 : $80C_3 + 60D_3 \leqq 500A_3 + 500B_3 + O_3$

DEC1 : $200 + C_1 - 600 \geqq 0$

DEC2 : $200 + C_1 - 600 + C_2 - 800 \geqq 0$

DEC3 : $200 + C_1 - 600 + C_2 - 800 + C_3 - 2000 \geqq 200$

DED1 : $100 + D_1 - 725 \geqq 0$

DED2 : $100 + D_1 - 725 + D_2 - 750 \geqq 0$

DED3 : $100 + D_1 - 725 + D_2 - 750 + D_3 - 800 \geqq 100$

OVE1 : $O_1 \leqq 116A_1$

OVE2 : $O_2 \leqq 116A_2$

OVE3 : $O_3 \leqq 100A_3$

PLO1 : $B_1 \leqq 1/3(A_1+B_1)$

PLO2 : $B_2 \leqq 1/3(A_2+B_2)$

PLO3 : $B_3 \leqq 1/3(A_3+B_3)$

RUI1 : $A_1 + \frac{1}{2}B_1 \leqq 300$

RUI2 : $A_2 + \frac{1}{2}B_2 \leqq 300$

RUI3 : $A_3 + \frac{1}{2}B_3 \leqq 300$

VAW1 : $A_1 + B_1 = 267 + I_1 - K_1$

VAW2 : $A_2 + B_2 = A_1 + B_1 + I_2 - K_2$

VAW3 : $A_3 + B_3 = A_2 + B_2 + I_3 - K_3$

VOETNOTEN

1) Voor een goed overzicht leze men Ackoff en Sasieni, hoofdstuk 1

2) Zie bijvoorbeeld Kramer en de Smit, paragraaf 6.4. en de Leeuw paragraaf 5.4.

3) De in paragraaf 1.4. beschreven modelcyclus vertoont ook gelijkenis met de in de literatuur van het organisatie-onderzoek voorkomende besluitvormingscyclus. Zie bijvoorbeeld Botter, paragraaf 3.3.2.

4) Voor een goed overzicht van verschillende soorten modellen zie men bijvoorbeeld Bertels en Nauta.

5) De zin en de gebruiksmogelijkheden van dergelijke modellen zijn beschreven in Douma, 1973. Een soortgelijk model voor de middellange termijnplanning bij een gemeente is beschreven in Douma, S.W. en F.J. van de Linde.

6) Voor de lezer die het begrip opportunity cost niet kent geven wij de volgende toelichting. De opportunity cost van het aanwenden van een bepaald produktiemiddel voor een bepaalde activiteit wordt gevormd door het verloren gaan van opbrengsten, die verkregen hadden kunnen worden door het aanwenden van dat produktiemiddel voor andere activiteiten. Indien een tandarts op een werkdag gaat vissen, bestaat de opportunity cost van het aanwenden van zijn arbeid voor de activiteit vissen uit de inkomsten, die hij had kunnen verkrijgen door zijn arbeid voor een andere activiteit (het behandelen van patiënten) aan te wenden.

7) Wij bewijzen dit als volgt: Stel er is een oplossing anders dan $x_1 = 40$, $x_2 = 40$, $x_3 = 0$, $x_4 = 20$, $x_5 = 0$ die een hogere waarde van z heeft. Iedere feasible solution moet voldoen aan het stelsel vergelijkingen in tabel 4.5. (immers dit

stelsel is equivalent met het oorspronkelijke stelsel). Stel deze andere oplossing is ($x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_2^1$, $x_3 = x_3^1$, $x_4 = x_4^1$, $x_5 = x_5^1$). Nu moet tenminste ofwel $x_3^1 > 0$ ofwel $x_5^1 > 0$ zijn (immers als $x_3^1 = 0$ en $x_5^1 = 0$, dan is $x_1^1 = 40$ en $x_2^1 = 40$ en $x_4^1 = 20$ zoals dan uit de tweede, derde en vierde rij van het tableau van tabel 4.5. gemakkelijk is af te leiden, en dan hebben wij dus dezelfde oplossing). Maar als ofwel $x_3^1 > 0$ ofwel $x_5^1 > 0$ (of zelfs beiden 0) dan kan
$z = 3000 - 15x_3^1 - 15x_5^1$ nooit groter dan 3000 zijn.

8) Deze keuze is niet erg fundamenteel. Wij kunnen ook een andere variabele kiezen, mits het element van de gekozen variabele in de z-rij negatief is. De ervaring leert echter, dat het aantal iteraties dat nodig is om de optimale oplossing te vinden in het algemeen kleiner is wanneer men de door ons geformuleerde regel hanteert dan wanneer men willekeurig kiest.

9) Wij kunnen ook schrijven:
maximeer

$$-3x_1 - 5x_2$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

De vorm waarin wij de doelstellingsfunctie schrijven (als maximalisatie of minimalisatie-probleem) doet niet ter zake. Wel zullen wij de restricties steeds zo schrijven, dat de constanten in het rechterlid alle ≥ 0 zijn.

10) Een andere formulering van het model verkrijgt men door de restricties LAB 1 en OVE 1 te vervangen door:

$$0{,}05A_1 + 0{,}08B_1 - O_1 \leq 350$$

en

$$O_1 \leq 175$$

en de restricties LAB 2, LAB 3, OVE 2 en OVE 3 door soortgelijke restricties te vervangen. De beslissingsvariabelen

U_1, U_2 en U_3 zijn in dat geval overbodig. Het model wordt daardoor iets kleiner.
De in paragraaf 9.2. gegeven modelformulering kan ook worden gebruikt, indien ook aan het niet-gebruiken van beschikbare direct produktieve manuren kosten verbonden zijn. In dat geval krijgen de variabelen U_1, U_2 en U_3 een positieve coëfficiënt in de doelstellingsfunctie. Bij de kosten van het niet-gebruiken van beschikbare direct produktieve manuren moet men niet denken aan de directe loonkosten. Het aantal werknemers is in deze probleemstelling immers een gegeven. De directe loonkosten worden dus beschouwd als vaste kosten en komen derhalve in het model niet vòòr. Bij de kosten van het niet-gebruiken van beschikbare direct productieve manuren moet veeleer worden gedacht aan het feit, dat onderbezetting demotiverend kan werken en als zodanig "psychische kosten" kan veroorzaken.

11) Aan de breuken met in de teller de coëfficiënten van de niet-basisvariabelen in de rij van de doelstellingsfunctie en in de noemer de coëfficiënten van de niet-basisvariabelen in de O_3-rij voegen wij nu in afwijking van de in paragraaf 7.1. beschreven procedure geen minteken toe. De reden is, dat ons probleem een minimeringsprobleem is, terwijl in paragraaf 7.1. een maximeringsprobleem werd besproken.

12) De methode die wij in hoofdstuk 10 beschrijven is ontwikkeld door het Israel Institute of Urban Studies te Tel-Aviv. In Nederland is deze methode geïntroduceerd door Raadgevend Bureau Berenschot. De methode staat in Nederland bekend onder de naam Urbanics.

13) In de "welfare-coefficients" van een bepaalde activiteit komt de bijdrage van die activiteit tot de welfare-function tot uitdrukking. Bij het definiëren van een dergelijke collectieve welfare-function doen zich talrijke problemen voor. Een van deze problemen wordt gevormd door het feit, dat men het nut van een bepaalde oplossing voor een bepaald individu niet kan vergelijken met het nut van diezelfde oplossing voor een ander individu. In de welvaartseconomie gebruikt men daarom het begrip Pareto-optimum. Een oplossing is Pareto-optimaal, indien er geen andere oplossing bestaat die voor tenminste één individu beter en voor alle andere individuën niet slechter is.
In de in dit voorbeeld gehanteerde welfare-coefficients komt tot uitdrukking de marktwaarde van de te bouwen woningen verminderd met de bouwkosten en de grondkosten en eveneens verminderd met de gekapitaliseerde transportkosten. Bij de grondkosten moet worden gedacht aan de waarde van de aanwen-

dingsmogelijkheden van de grond, die door het bouwen van woningen verloren gaan, niet aan de marktwaarde als bouwgrond. In de transportkosten is onder andere de waarde van de reistijden begrepen. Men zie voor de specificatie van de doelstellingsfunctie ook Ben-Shahar.

14) Voor de motivering van het woordje "dus" verwijzen wij naar de eerste drie alinea's van paragraaf 7.2.

15) In paragraaf 3.2. hebben wij bij de behandeling van het parametrisch programmeren z geschetst als functie van een der parameters in het rechterlid. Het ging in paragraaf 3.2. net als hier om een maximeringsprobleem. Beschouwen wij figuur 3.3. dan constateren wij dat $z = f(b_1)$ monotoon stijgend en convex (bol) is. Men kan bewijzen, dat bij een maximeringsprobleem z als functie van één der parameters in het rechterlid altijd monotoon stijgend en convex is. De eigenschap dat z monotoon stijgend is betekent, dat bij een maximeringsprobleem een toeneming van de capaciteit van één der restricties nooit kan leiden tot een afneming van z. De eigenschap dat z convex is, betekent dat de marginale opbrengst van een vergroting van de capaciteit nooit kan toenemen bij vergroting van de capaciteit.
In figuur 10.1. schetsen wij z niet als functie van één der parameters in het rechterlid, maar als functie van y. Omdat in het rechterlid van restrictie ZON 2 voorkomt het getal 12000-y, is z als functie van y monotoon afnemend en convex. Aan de waarde van u_2 in tabel 10.1. moeten wij om dezelfde reden een -teken toevoegen om de helling van de lijnstukjes in figuur 10.1. te vinden.

LITERATUUROPGAVE

Ackoff, R.L. en M.W. Sasieni
Fundamentals of operations research
Wiley, 1968

Anderson, D.R., D.J. Sweeney and Th.A. Williams
Linear programming for decision making, an applications approach
West Publishing Co, New York, 1974

Ben-Shahar, H., A. Mazor en D. Pines
Town planning and welfare maximization: a methodological approach
Regional Studies, Vol. 3, pag. 105-113

Bertels, C.P. en D. Nauta
Inleiding tot het modelbegrip
Bussum, 1969

Botter, C.H.
Industrie en Organisatie
Kluwer, 1977

Dorfman, R., P.A. Samuelson en R.M. Solow
Linear programming and economic analysis
McGraw-Hill, New York, 1958

Douma, S.W.
Planning op middellange termijn met een computermodel
Tijdschrift voor Effectief Directiebeleid
Mei 1973, pag. 174-179

Douma, S.W. en F.J. van de Linde
De betekenis van financiële modellen voor het bestuur van de gemeente
Gemeentefinanciën, November 1972, pag. 209-213

Kramer, N.J.T.A. en J. de Smit
Systeemdenken
Stenfert Kroese, 1974

De Leeuw, A.C.J.
Systeemleer en organisatiekunde
Stenfert Kroese, 1974

Van de Panne, C.
Linear programming en related techniques
North-Holland Publishing Company, 1971

Van de Panne, C.
Methods for linear and quadratic programming
North-Holland/American Elsevier, Amsterdam/New York, 1975

Zionts, S.
Linear and integer programming
Prentice-Hall, 1974

INDEX

ACADEMIC SERVICE INFORMATICA UITGAVEN

INLEIDINGEN

Computers en onze samenleving van M.A. Arbib
Basiskennis informatieverwerking van Jan Everink
De viewdata revolutie van S. Fedida en R. Malik
De informatiemaatschappij van Jan Everink
Informatica, een theoretische inleiding van dr. L.P.J. Groenewegen en prof.dr. A. Ollongren
AIV, Automatisering van de informatieverzorging van ir. Th.J.G. Derksen en drs. H.W. Crin
Organisatie, informatie en computers van David M. Kroenke

MICROCOMPUTERS

Programmeercursus Microsoft BASIC van Nok van Veen
Werken met bestanden in BASIC van L. Finkel en J.R. Brown
Werken met bestanden op de Apple van L. Finkel en J.R. Brown
Werken met Visicalc van C. Klitzner en M.J. Plociak, Jr.
CP/M: een gids voor zelfstudie van J.N. Fernandez en R. Ashley
Cursus Z-80 assembleertaal van Roger Hutty
Exidy sorcerer en BASIC van Nok van Veen e.a.
TRS-80 BASIC: een gids voor zelfstudie van Bob Albrecht e.a.
TRS-80 BASIC voor gevorderden van Don Inman e.a.
Ontdek de ZX-Spectrum van Tim Hartnell
Flitsend FORTH van Alan Winfield

PROGRAMMEREN/PROGRAMMEERTALEN

Een methode van programmeren van prof.dr. Edsger W. Dijkstra en ir. W.H.J. Feijen
Programmeren, het ontwerpen van algoritmen, in Pascal van ir. J.J. van Amstel
Inleiding tot het programmeren, deel 1 van ir. J.J. van Amstel e.a.
Inleiding tot het programmeren, deel 2 van ir. J.J. van Amstel e.a.
JSP - Jackson struktureel programmeren van Henk Jansen
Aspecten van programmeertalen van ir. J.J. van Amstel en ir. J.A.A.M. Poirters
Programmeertalen, een inleiding van ir. J.J. van Amstel e.a.
Het Groot Pascal Spreukenboek van H.F. Ledgard, P.A. Nagin en J.F. Hueras
Cursus Pascal van prof.dr. A. van der Sluis en drs. C.A.C. Görts
Cursus eenvoudig Pascal van prof.dr. A. van der Sluis en drs. C.A.C. Görts
Inleiding programmeren in Pascal van C. van de Wijgaart
BASIC, EIT-serie, deel 3
Cursus BASIC van ir. R. Bloothoofd e.a.
Cursus COBOL van dr. A. Parkin
Struktuur en stijl in COBOL van ir. E. Dürr en dr.ir. F. Mulder
Cursus FORTRAN 77 van J.N.P. Hume en R.C. Holt
Programmeren in LISP van prof.dr. L.L. Steels
Cursus ALGOL 60 van prof.dr. A. van der Sluis en drs. C.A.C. Görts
Programmeren, deel 2: Van analyse tot algoritme van prof.drs. C. Bron
Inleiding programmeren en programmeertechnieken, EIT-serie, deel 1
Inleiding programmeren van prof.dr. R.J. Lunbeck

SYSTEEMPROGRAMMATUUR

Bedrijfssystemen, EIT-serie, deel 4

Systeemprogrammatuur van drs. H. Alblas

Vertalerbouw van drs. H. Alblas e.a.

Unix, het standaard operating system van G.J.M. Austen en H.J. Thomassen

BESTANDSORGANISATIE/DATABASES

Informatiestructuren, bestandsorganisatie én bestandsontwerp, EIT-serie, deel 5

Gegevensstructuren van R. Engmann e.a.

Bestandsorganisatie van prof.dr. R.J. Lunbeck en drs. F. Remmen

Databases van drs. F. Remmen

INFORMATIEANALYSE/SYSTEEMONTWERP

Effectieve toepassingen van computers van M. Peltu

Voorbereiding van computertoepassingen van prof.dr. A.B. Frielink

Simulatie, een moderne methode van onderzoek van drs. S.K.T. Boersma en ir. T. Hoenderkamp

Systeemontwikkeling volgens SDM van H.B. Eilers

Een samenvatting van de System Development Methodology SDM van PANDATA

Cases op het gebied van administratieve organisatie en informatieverzorging (inclusief systeemontwerp) van prof.dr. P.G. Bosch en H.A. te Rijdt

Uitwerkingenboek bij Cases van prof.dr. P.G. Bosch en H.A. te Rijdt

Gegevensanalyse van R.P. Langerhorst

Evaluation of methods and techniques for the analysis, design and implementation of information systems, editors: J. Blank en M.J. Krijger

Analyse van de informatiebehoeften en de inhoudsbeschrijving van een databank van prof.dr. P.G. Bosch en ir. H.M. Heemskerk

Eerlijk en helder van prof.dr. P.G. Bosch

THEORETISCH/COMPUTERSCHAAK/TOEPASSINGEN

Computers in de negentiger jaren van G.L. Simons

Expert systemen, ontwikkeling en gebruik van intelligente programma's van Henk de Swaan Arons en Peter van Lith

Abstracte automaten en grammatica's van prof.dr. A. Ollongren en ir. Th.P. van der Weide

De tekstmachine van dr. M. Boot en drs. H. Koppelaar

Computerschaak, schaakwereld en kunstmatige intelligentie van dr. H.J. van den Herik

Lineaire programmering als hulpmiddel bij de besluitvorming van prof.dr. S.W. Douma

Simulatie en sociale systemen, redaktie: J.L.A. Geurts en J.H.L. Oud

Onderneming en overheid in systeem-dynamisch perspectief, redaktie: A.F.G. Hanken en J.H.L. Oud

Over de auteur



Dr. S.W. Douma is hoogleraar economische wetenschappen aan de Open Universiteit. Hij was daarvoor wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de Rijksuniversiteit Groningen, afdelingsdirecteur bij Pierson Heldring en Pierson en senior-adviseur bij Raadgevend Bureau Berenschot.

Over het boek

Lineaire programmering is een bekende optimaliseringstechniek. Voor het gebruik van lineaire programmering in de praktijk waren tot voor kort grote computerconfiguraties nodig. Tegenwoordig kan men voor niet te grote LP-problemen ook gebruik maken van een microcomputer. Daarmee is het gebruik van LP binnen het bereik van zeer velen gekomen.
In dit boek ligt het accent op een intuïtieve, niet-wiskundige benadering. Veel aandacht wordt gegeven aan de economische betekenis van de bij lineaire programmering gebruikte begrippen en aan de betekenis van deze begrippen voor de besluitvorming.
De belangrijkste leerdoelen van dit boek zijn de student te leren een probleem te formuleren als een lineair programmeringsprobleem, dat probleem vervolgens op te lossen met behulp van de (micro)computer en de verkregen resultaten te interpreteren.